

Tese de Doutorado

MODELAGEM E CONTROLE DE UM MICROVEÍCULO AÉREO: UMA APLICAÇÃO DE ESTABILIDADE ROBUSTA COM A TÉCNICA BACKSTEPPING EM UMA ESTRUTURA HEXARROTOR

Armando Sanca Sanca

Natal, fevereiro de 2013



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Elétrica e de Computação



MODELAGEM E CONTROLE DE UM MICROVEÍCULO AÉREO: UMA APLICAÇÃO DE ESTABILIDADE ROBUSTA COM A TÉCNICA BACKSTEPPING EM UMA ESTRUTURA HEXARROTOR

Autor: Armando Sanca Sanca
Orientador: Prof. Dr. Pablo Javier Alsina - UFRN
Co-Orientador: Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira - UFBA

*Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade
Federal do Rio Grande do Norte, para preenchimento de
requisitos parciais à obtenção do Título de
DOUTOR EM CIÊNCIAS*

Banca Examinadora

Dr. Pablo Javier Alsina - UFRN (Presidente)
Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira - UFBA Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea - UFRN
Dr. Anfranserai Morais Dias - UEFS Dr. André Macêdo Santana - UFPI

Número de ordem PPgEEC: D089

Natal-RN, Fevereiro de 2013.

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede.
Catalogação da Publicação na Fonte.

Sanca, Armando Sanca.

Modelagem e controle de um microveículo aéreo: uma aplicação de estabilidade robusta com a técnica backstepping em uma estrutura hexarrotor. / Armando Sanca Sanca. – Natal, RN, 2013.

109 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Pablo Javier Alsina.

Co-orientador: Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Modelagem dinâmica - Tese. 2. Hexarrotor - Tese. 3. Controle robusto por backstepping - Tese. 4. Estimação de atitude por FKE - Tese. I. Alsina, Pablo Javier. II. Cerqueira, Jês de Jesus Fiais. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. IV. Título.

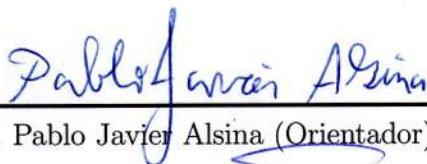
RN/UF/BCZM

CDU 681.51

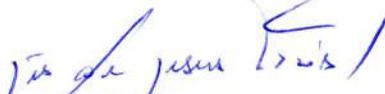
MODELAGEM E CONTROLE DE UM MICRO-VEÍCULO
AÉREO: UMA APLICAÇÃO DE ESTABILIDADE ROBUSTA
COM A TÉCNICA BACKSTEPPING EM UMA ESTRUTURA
HEXA-ROTOR

Armando Sanca Sanca

Tese de Doutorado aprovada em 01 de fevereiro de 2013 pela banca examinadora
composta pelos seguintes membros:



Dr. Pablo Javier Alsina (Orientador) UFRN



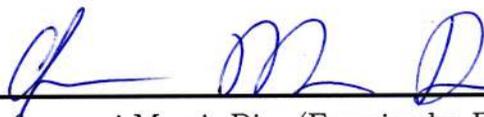
Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira (Co-orientador) UFBA



Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea (Examinador Interno) UFRN



Dr. André Macêdo Santana (Examinador Externo) UFPI



Dr. Anfranserai Moraes Dias (Examinador Externo) UEFS

Con mucho amor para mis padres
Juan y Victoria Melina

Resumo

Nesta Tese, são apresentados os desenvolvimentos da modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado multirrotor com capacidade de decolagem e pouso vertical, considerando as não linearidades de entrada e o desenvolvimento de um controlador robusto por backstepping. A formulação do modelo dinâmico é expressa usando-se as leis de *Newton-Euler*, visando à obtenção de uma melhor representação matemática do sistema mecânico para a análise e projeto das leis de controle, não apenas quando está pairando, como também de decolagem, de pouso, ou de voo executando uma tarefa. As não linearidades de entrada são a zona morta e a saturação, onde o efeito gravitacional e as inerentes restrições físicas dos rotores são relacionadas e abordadas. O microveículo experimental está equipado com uma unidade de medida inercial e um sonar, que devidamente instrumentada fornece as medidas da atitude e altitude. Foi desenvolvido um estimador em tempo real para atitude usando quatérnios e baseado em filtro de Kalman estendido. Para a formulação robusta do controlador, os sensores foram modelados como o valor real, que é o valor ideal com a adição de um viés e mais um ruído branco desconhecidos e limitados. Os controladores de atitude e altitude foram derivados usando-se o critério *globalmente uniformemente praticamente assintoticamente estável* para sistemas reais, que permanece *globalmente uniformemente assintoticamente estável* se e somente se suas soluções são *globalmente uniformemente limitadas*, lidando com a convergência e estabilidade dentro de uma região com raio não nula, levando em consideração algumas suposições como as incertezas nas medições. A técnica de análise de Lyapunov foi usada para: provar a estabilidade do sistema em malha fechada; calcular os limites dos ganhos de controle, e, obter a garantia limitada pretendida sobre o erro de rastreamento da dinâmica de atitude na presença de distúrbios nas medições. As leis de controle foram testadas em simulações numéricas e em um hexarrotor experimental, desenvolvido no Laboratório de Robótica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Palavras-chave

Hexarrotor; Modelagem Dinâmica; Controle Robusto por Backstepping; Estimação de Atitude por **FKE**.

Abstract

In this Thesis, the development of the dynamic model of multirotor unmanned aerial vehicle with vertical takeoff and landing characteristics, considering input nonlinearities and a full state robust backstepping controller are presented. The dynamic model is expressed using the *Newton-Euler* laws, aiming to obtain a better mathematical representation of the mechanical system for system analysis and control design, not only when it is hovering, but also when it is taking-off, or landing, or flying to perform a task. The input nonlinearities are the deadzone and saturation, where the gravitational effect and the inherent physical constrains of the rotors are related and addressed. The experimental multirotor aerial vehicle is equipped with an inertial measurement unit and a sonar sensor, which appropriately provides measurements of attitude and altitude. A real-time attitude estimation scheme based on the extended Kalman filter using quaternions was developed. Then, for robustness analysis, sensors were modeled as the ideal value with addition of an unknown bias and unknown white noise. The bounded robust attitude/altitude controller were derived based on *globally uniformly practically asymptotically stable* for real systems, that remains *globally uniformly asymptotically stable* if and only if their solutions are *globally uniformly bounded*, dealing with convergence and stability into a ball of the state space with non-null radius, under some assumptions. The Lyapunov analysis technique was used to prove the stability of the closed-loop system, compute bounds on control gains and guaranteeing desired bounds on attitude dynamics tracking errors in the presence of measurement disturbances. The controller laws were tested in numerical simulations and in an experimental hexarotor, developed at the **UFRN** Robotics Laboratory.

Keywords

Hexarotor; Dynamic Modeling; Robust Backstepping Control; **EKF** Attitude Estimation.

Agradecimentos

Meu sincero agradecimento.

Ao Professor Dr. Pablo Javier Alsina, orientador desta tese, pela amizade, pelo apoio e pela confiança depositada quando aceitou ser o meu orientador. Pela dedicação e competência demonstradas, acima de tudo, pela presença humana, capaz de agregar esforços e somar capacidades.

Ao Professor Dr. J s de Jesus Fiais Cerqueira, da **UFBA**, pela amizade, pela co-orienta o, pelos valiosos incentivos e as trocas de ideias que auxiliaram a elabora o de muitos pontos importantes desta tese.

Aos comentários e as sugestões dos membros da banca examinadora desta tese: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea, da **UFRN**; Prof. Dr. André Macêdo Santana, da **UFPI**; e o Prof. Dr. Anfranserai Morais Dias, da **UEFS**.

Muito obrigado professores!.

- Aos Professores e Funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação (**PPgEEC**) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (**UFRN**), pela amizade e cordialidade que sempre me proporcionaram, e por tudo que me ensinaram, contribuindo em muito para o meu aprimoramento profissional.
- À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação (**PPgEEC**), pela oportunidade de realizar o curso de doutorado, e aos responsáveis pela chefia do Departamento de Engenharia de Computação e Automação (**DCA**) durante o período de formação e desenvolvimento desta tese.
- Ao Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional do Petróleo 14 (**PRH ANP-14**), pela concessão de uma bolsa de estudos durante a realização do curso de doutorado.
- Aos colegas e amigos que tive a oportunidade de conhecer durante o curso de doutorado na **UFRN**, em especial aos do Departamento de Engenharia de Computação e Automação (**DCA**).
- A todos os amigos que conviveram comigo no Laboratório de Robótica (**LAR**), pelo clima de companheirismo e respeito mútuo, a Tania, João Paulo, Alessandro, Michel, Gutemberg, Márcio, Filipe, Lennedy, Ellon, Guilherme, Vitor, Luiz Henrique e Djalma.
- A Dios el único cuyo nombre es Jehová, por haberme proporcionado unos excelentes padres, Juan e Victoria Melina. A ellos no por sólo por darme la vida, sino por recibir una ejemplar educación y por todo los sacrificios que hicieron por mi, valió la pena tanto esfuerzo, desde el fondo de mi corazón **GRACIAS** por confiar en mi.
- A toda mi familia por soportar mi ausencia, en especial a mis hermanos Nancy Karina, Huilman y Ruben.
- A minha linda esposa Ana Lígia e a família Lago Borges, em especial a minha mãe brasileira Maria das Graças, às minhas irmãs Claudia Cristina e Kátia Regia por suas valiosas contribuições gramaticais ao texto, obrigado pela ajuda, pelo apoio, e por tantas coisas que, por vezes, somente boas pessoas podem fazer por nós.
- E a todos os amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta conquista,

O meu muito obrigado!

Natal-RN, 01 de fevereiro de 2013.
Armando Sanca Sanca.

Índice

Resumo	vii
Abstract	ix
Agradecimentos	xi
Índice	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Acrônimos	xix
Lista de Símbolos	xxi
1 Introdução	1
1.1 Definição do Problema	5
1.2 Proposta e Contribuições da Tese	6
1.3 Justificativa	7
1.4 Estrutura do Texto	8
2 Modelagem Cinemática e Dinâmica do VANT Multirroto	11
2.1 Introdução	11
2.2 VANT Hexarroto	12
2.2.1 Não Linearidades de Entrada	12
2.2.2 Aerodinâmica do Rotor em Voo Axial	14
2.2.3 Dinâmica da Pá em Voo Axial	17
2.2.4 Máquinas de Corrente Contínua sem Escovas	18
2.3 Modelagem do VANT Hexarroto	21
2.3.1 Resultados Simulados do Modelo Dinâmico Proposto	30
2.4 Sumário	32

3	Estimação de Atitude em Tempo Real para o VANT Hexarrotor	39
3.1	Introdução	40
3.2	Metodologia	41
3.2.1	Estimação de Atitude Baseado em Medidas de Acelerômetros	42
3.2.2	Estimação de Atitude Baseada em Medidas de Magnetômetros	44
3.2.3	Estimação de Atitude Baseada em Medidas de Girômetros . .	45
3.2.4	Fusão de Dados da Atitude	46
3.3	Resultados Experimentais	49
3.4	Sumário	52
4	Controle Robusto por Backstepping para Um VANT Hexarrotor	55
4.1	Introdução	56
4.2	Definições de Estabilidade Segundo Lyapunov	56
4.3	Projeto do Controlador por Backstepping	
	Aplicado ao Hexarrotor	61
4.3.1	Simulações Numéricas do Projeto do Controlador	66
4.4	Projeto do Controlador Robusto por Backstepping	71
4.4.1	Análise de Distúrbios nas Medições para a Estabilidade do Sistema	77
4.4.2	Estabilidade Assintótica Global Uniforme para o VANT Hexarrotor	79
4.4.3	Simulações e Resultados Experimentais	82
4.5	Sumário	85
5	Conclusão	89
5.1	Considerações e Contribuições	89
	Referências Bibliográficas	91
A	Quatérnios	101
A.1	Operações e Propriedades	101
A.2	Exponencial	102
A.3	Notação Matricial/Vetorial	103
A.4	Matriz de Rotação/Transformação	104
A.5	Conversão entre Quatérnios e Ângulos de Euler	104
B	Determinação de Limites dos Ganhos para uma Estabilidade Assintótica Robusta	107

Lista de Figuras

1.1	VANT/VTOL hexarrotor.	3
2.1	Não linearidades de entrada: a) saturação e b) zona morta.	13
2.2	Combinação das não linearidades de entrada dos tipos zona morta e saturação.	14
2.3	Fluxo do ar no rotor em voo axial.	15
2.4	Vetor empuxo.	17
2.5	Componentes das forças sobre uma seção da pá do rotor em voo vertical.	18
2.6	Motor BLDC com o acionamento e circuito equivalente.	20
2.7	Microveículo aéreo desenvolvido no Laboratório de Robótica da UFRN	22
2.8	Movimentos realizados para o hexarrotor: deslocamentos altitudinal, longitudinal, lateral e guinada.	22
2.9	Modelagem do VANT hexarrotor e seus respectivos sistemas de referência.	23
2.10	Momento de inércia do VANT hexarrotor.	26
2.11	Não linearidade de entrada: zona morta e saturação.	27
2.12	Representação do modelo dinâmico e cinemático em simulink [®] para o VANT hexarrotor.	31
2.13	Resposta ao degrau unitário do modelo do VANT desenvolvido.	33
2.14	Resposta ao degrau unitário, com $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$	34
2.15	Resposta a um movimento sinusoidal no eixo x (pitching θ), com V_{air} e Ω_{air} nulos.	35
2.16	Resposta a um movimento sinusoidal no eixo y (rolling ϕ), com V_{air} e Ω_{air} nulos.	36
2.17	Resposta a movimentos nos eixos x e y com $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$	37
3.1	Microveículo aéreo multirrotor no DCA/UFRN	42
3.2	Diagrama em blocos para o estimador de atitude e o circuito experimental implementado de baixo custo usado no VANT hexarrotor.	49
3.3	Arquitetura hardware do sistema embarcado usado no VANT hexarrotor.	50

3.4	Tempo de aquisição e taxa de atualização do sensor pelo barramento microcontrolador/computador e o tempo de execução do FKE para estimação de atitude.	51
3.5	Estimação dos ângulos de atitude por FKE	53
3.6	Resultados da estimação de atitude visualizando as entradas, o processo de filtragem com os quatérnios e os ângulos obtidos.	54
4.1	Representação do esquema de controle por backstepping para o VANT hexarrotor. Sinais de referência: $\mathbf{x}_{1d} = [x_d, y_d]^T$ e $\mathbf{x}_{5d} = [z_d, \psi_d]^T$. As trajetórias geradas para os sinais de referência x_d, y_d, z_d and ψ_d são realizadas com o uso funções de transferência com comportamento suave e com condições iniciais nulas.	66
4.2	Erro de rastreamento para x, y, z e ψ , aplicando a técnica backstepping no VANT hexarrotor.	68
4.3	Resposta do hexarrotor com controle PID , realizando movimento vertical pairado ao longo do eixo, $z = 10\text{m}$, com V_{air} e Ω_{air} nulos.	69
4.4	Resposta do hexarrotor com controle PID , realizando movimento vertical pairado ao longo do eixo, $z = 10\text{m}$ com $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$	70
4.5	Resposta ao degrau com sinais de referência $\phi_d = \theta_d = 10\pi/180$ radianos, $\psi_d = 80\pi/180$ radianos e $z_d = 10\text{ m}$. O controlador por backstepping estabiliza o sistema e rastreia os ângulos de rolagem, arfagem, guinada e altitude com erro de regime nulo.	83
4.6	Erros de rastreamento de altitude e dos ângulos atitude.	84
4.7	Erros de rastreamento das variáveis virtuais $\mathbf{z}_{1,2,\dots,8}$; as velocidades angulares dos rotores $\omega_{1,2,\dots,6}[\text{rad/seg}]$; sinais de controle $\mathbf{u}_{1,2,3,4}$; e as larguras de pulso, $\delta_{1,2,\dots,6}$, dos sinais PWM	84
4.8	Resposta do hexarrotor com controle backstepping robusto, para movimentos verticais em voo pairado ao longo do eixo z	86
4.9	Resposta do erro de seguimento para atitude/altitude.	87
4.10	Sinais de controle aplicados ao hexarrotor.	87

Lista de Tabelas

2.1	Principais parâmetros do hexarrotor.	31
4.1	Parâmetros usados na simulação usados do VANT hexarrotor.	67
4.2	Principais parâmetros do VANT hexarrotor.	83

Lista de Acrônimos

A menos que referência contrária seja fornecida, os acrônimos abaixo possuem os seguintes significados:

PPgEEC Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação

ANP Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis

PRH ANP-14 Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional do Petróleo
14

DCA Departamento de Engenharia de Computação e Automação

UFRN Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFBA Universidade Federal da Bahia

UEFS Universidade Estadual de Feira de Santana

UFPI Universidade Federal do Piauí

LAR Laboratório de Robótica

UAV Unmanned Aerial Vehicle

VANT Veículo Aéreo Não Tripulado

MVA Microveículo Aéreo

VTOL Decolagem e Pouso Vertical (*Vertical Takeoff and Landing*)

FCS Flight Control System

SCV Sistema de Controle de Voo

IMU Unidade de Medida Inercial (*Inertial Measurement Unit*)

GPS Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System*)

FKE Filtro de Kalman Estendido

EKF Extended Kalman Filter

PBVS Servovisão Baseada em Posição (*Position-Based Visual Servoing*)

IBVS Servovisão Baseada em Imagem (*Image-Based Visual Servoing*)

BLDC Corrente Contínua Sem Escovas (*BrushLess Direct Current*)

DC Corrente Direta (*Direct Current*)

PWM Pulse-Width Modulation

SISO Single-input-single-output

MIMO Multiple-input-multiple-output

UAS Estabilidade Assintótica Uniforme (*Uniform Asymptotic Stability*)

GUPAS Globalmente Uniformemente Praticamente Assintoticamente Estável (*Globally Uniformly Practically Asymptotically Stable*)

GUAS Globalmente Uniformemente Assintoticamente Estável (*Globally Uniformly Asymptotically Stable*)

GUB Globalmente Uniformemente Limitada (*Globally Uniformly Bounded*)

RPM Revoluções Por Minuto

fcem Força Contra-Eletromotriz

NED North, East and Down

CM Centro de Massa

USB Barramento Serial Universal (*Universal Serial Bus*)

DOF Graus de Liberdade (*Degrees-of-Freedom*)

ADC Conversor Analógico-Digital (*Analog to Digital Converter*)

GDL Graus de Liberdade

PID Proporcional-Integral-Derivativo

CI Circuito Integrado

Lista de Símbolos

Os símbolos possuem os seguintes significados:

R_1	Raio da área 1
R	Raio da pá
V_c	Velocidade relativa do ar no rotor
p_∞	Pressão ambiente
v_i	Velocidade induzida do ar
R_2	Raio da área 2
ω	Velocidade angular
ωR	Velocidade da ponta da pá
r	Raio de uma seção da pá
c	Cumprimento de corda da pá
θ_b	Ângulo de passo da pá
ϕ_b	Ângulo de influxo
dT	Força de empuxo
dQ	Torque
dL	Força de sustentação
dD	Força de arrasto
C_T	Coefficiente de empuxo
C_Q	Coefficiente de torque
ρ	Coefficiente de densidade do ar
A	Área do disco do rotor
V_i	Estator trifásico com tensões $i = a, b, c$
i_i	Correntes da linha trifásica com $i = a, b, c$
R_i	Resistências de armadura com $i = a, b, c$
L_i	Auto-indutâncias da armadura com $i = a, b, c$
M	Indutância mútua
e_i	Força contra-eletromotriz trifásica com $i = a, b, c$
$\frac{d}{dt}$	Operador diferencial
$V_g \delta(t)$	Sinais de tensão PWM com larguras de pulso
$i(t)$	$\delta(t) \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ Corrente de fase
R_m	Resistência de armadura equivalente

L_m	Indutância de armadura equivalente
k_e	Constante de fcem
$\omega(t)$	Velocidade angular do motor
τ_e	Torque eletromagnético
τ_l	Torque de carga
J_m	Constante de inércia do motor
k_t	Constante de torque do motor
B	Coefficiente de atrito viscoso
\mathfrak{F}_i	Referência Inercial
\mathfrak{F}_h	Referência do corpo do Hexarrotor
$\boldsymbol{\xi} \triangleq [x, y, z]^T$	Vetor de Posição
$\boldsymbol{\varphi} \triangleq [\phi, \theta, \psi]^T$	Vetor de ângulos de atitude com ϕ “Rolagem”, θ “Arfagem” e ψ “Guinada”
\mathbf{V}	Vetor de velocidade de translação ou linear
$[{}^h v_x, {}^h v_y, {}^h v_z]^T$	
$\boldsymbol{\Omega}$	Vetor de velocidade angular
$[{}^h \Omega_x, {}^h \Omega_y, {}^h \Omega_z]^T$	
\mathbf{R}_t	Matriz de transformação de Euler $\mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi}$
\mathbf{R}_r	Matriz de Tait-Bryan
m	Massa total do hexarrotor
\mathbf{J}	Matriz de inércia do hexarrotor
$\mathbf{F}_{\text{aero}}, \boldsymbol{\tau}_{\text{aero}}$	Efeito aerodinâmico
\mathbf{F}_{grav}	Efeito gravitacional
\mathbf{F}_{prop}	Força de empuxo dos rotores
$\boldsymbol{\tau}_{\text{prop}}$	Torque gerado pelas três configurações coaxiais
$ T_i $	i -ésimo força de empuxo gerado, $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$
Q_i	i -ésimo momento gerado
l	Distância do epicentro do hexarrotor ao eixo axial dos rotores coaxiais
\mathbf{V}_{air}	Velocidade translacional do ar $\{v_{x\text{air}}, v_{y\text{air}}, v_{z\text{air}}\}$
$\boldsymbol{\Omega}_{\text{air}}$	Velocidade rotacional do ar $\{\Omega_{x\text{air}}, \Omega_{y\text{air}}, \Omega_{z\text{air}}\}$
\mathbf{G}	Vetor de aceleração da gravidade
$g = 9.81\text{m/s}^2$	Aceleração da gravidade
\mathbf{K}_t	Matriz diagonal de aerodinâmica linear com parâmetros k_t
\mathbf{K}_r	Matriz diagonal de aerodinâmica rotacional com parâmetros k_r
J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}	Componentes da matriz de inércia
m_1	Massa esférica densa
r_1	Raio da massa esférica densa
m_2	Massa cilíndrica densa
r_2	Raio da massa cilíndrica densa
\mathbf{x}_i	i -ésimo vetor de estado onde, $i = 1, \dots, 7$

f_i, g_i	Funções não lineares do sistema em espaço de estados, onde $i = 1, \dots, 3$
δ	Vetor de entrada PWM
\vec{a}_{CM}	Vetor de aceleração do hexarrotor respeito ao seu centro de massa
$\vec{\omega}$	Vetor de velocidade angular fixo ao corpo
$\vec{\alpha}$	Vetor de aceleração angular
\vec{a}_{noise}	Ruído branco gaussiano na aceleração
\vec{a}_{bias}	Viés envolvido na aceleração medida
\mathbf{A}_{SFCC}	3×3 Matriz diagonal de fatores de escala
\mathbf{f}^b	Força específica
a_x	Valor da aceleração medida pelo IMU ao longo do eixo x
a_y	Valor da aceleração medida pelo IMU ao longo do eixo y
\vec{m}	Vetor do magnetômetro
\mathbf{R}^{be}	Matriz de transformação do corpo à referência terrestre
\vec{m}_{noise}	Ruído branco gaussiano com média nula sobre o magnetômetro
ψ_m	Estimativa da guinada relativa ao sistema de referência NED
m_x	Medida do valor do magnetômetro pelo IMU ao longo do eixo x
m_y	Medida do valor do magnetômetro pelo IMU ao longo do eixo y
Ω_{SFCC}	3×3 Matriz de fatores de escala dos girômetros
$\vec{\omega}_{bias}$	Vieses dos girômetros
$\vec{\omega}_{noise}$	Ruído branco gaussiano com média nula sobre o girômetro
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Variações angulares sobre os eixos
\vec{q}^{be}	Vetor de quatérnios do corpo ao referencial inercial
ΔT	Período de amostragem
ν_i	Representa a i -ésima variável de entrada de controle virtual por backstepping
z_i	Representa a i -ésima variável do erro de rastreamento por backstepping
δ_{mov}	Vetor de movimentos: coletivo, longitudinal, lateral e guinada $\delta_{mov} = [\delta_{col}, \delta_{lon}, \delta_{lat}, \delta_{ped}]^T$, para as entradas respectivamente
$\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$	Atitude resultante da rotação do corpo rígido
$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$	Posição devido à ação dos três pares de rotores coaxiais contrarrotativos
Ω_{iair} 's	Componente de distúrbio de vento angular ao longo do respectivo eixo $i = x, y, z$

$V_{\text{iair}}\text{'s}$	Componente de distúrbio de vento linear ao longo do respectivo eixo $i = x, y, z$
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$	Variações angulares de ${}^h\Omega_x, {}^h\Omega_y$ e ${}^h\Omega_z$
γ	Viés desconhecido e varia lentamente e é limitado
η	Ruído branco gaussiano desconhecido
s	Variável de Laplace

Capítulo 1

Introdução

AS instalações industriais de petróleo e gás natural fazem uso de sistemas de dutos e tanques para transportar e armazenar substâncias inflamáveis, frequentemente a elevada pressão. Apesar de tais instalações serem dotadas com sistemas de segurança apropriados, alguns fatores de difícil controle, na maioria das vezes associadas a deterioração ou a falha humana, deixam vulneráveis até os mais confiáveis sistemas que, em última instância, acabam por apresentar derramamento de produto por vazamento ou explosões provocando efeitos nocivos.

Quando não detectados e corrigidos rapidamente, vazamentos e outras situações de emergência em instalações petrolíferas resultam frequentemente em graves impactos ambientais, além dos prejuízos econômicos devidos às consequentes paradas de produção. Os derramamentos de petróleo e vazamento de gás sobre o mar ou em áreas de florestas geram consequências negativas para a área afetada, principalmente em regiões amazônicas, costeiras e áreas de preservação. A rápida detecção e localização dessas ocorrências são muitas vezes decisivas na determinação e na minimização dos danos ambientais, perdas econômicas e acidentes com seres humanos. Dessa forma, a identificação dessas ocorrências em tempo hábil, torna-se imprescindível para a minimização dos seus efeitos nocivos. Neste contexto, sistemas automáticos de supervisão e inspeção aérea, através de controle autônomo vem se tornando mais uma ferramenta dentre um conjunto de sistemas utilizados para garantir a segurança de instalações industriais.

Um sistema de supervisão aérea pode ser constituído a partir de um Veículo Aéreo

Não Tripulado (**VANT**)¹ com instrumentação dedicada para as tarefas de supervisão e inspeção. Os veículos aéreos usuais para estas tarefas são os helicópteros, por suas inerentes vantagens de voo pairado, decolagem e pouso vertical. A grande capacidade de manobra do helicóptero o torna ideal para realizar supervisão aérea de instalações industriais, principalmente em situações em que se exige a verificação a curta distância e de situações de risco.

Hoje em dia, um micro **VANT** vem se tornando significativamente útil nas diferentes formas de interações com civis, algumas tais como: missões de exploração complexas, salvamento, vigilância e entretenimento (Pastor *et al.*, 2007). A expressão **VANT** identifica um veículo aéreo de pequeno porte, em que usando uma estrutura particular associada a um sistema de hardware e software embarcadas e combinando sensores e atuadores voa sem a intervenção de um piloto civil. Este tipo de veículo foi usado com sucesso em diferentes tarefas com capacidade de decolagem e pouso vertical² (Tayebi e McGilvray, 2006), dentre elas destacando-se aplicações militares de supervisão e vigilância remotos, além de uma gama de missões e ações emergenciais controladas por uma estação de base (Bouabdallah *et al.*, 2007; Bethke *et al.*, 2008). Estes sistemas são compostos basicamente de seis principais submódulos: Uma pequena estrutura **VANT**; um sistema computacional embarcado; o controlador de missão; a carga útil; o sistema de estação de base e o sistema de comunicação que trabalham coordenadamente para obter uma plataforma de supervisão de grande valor (Pastor *et al.*, 2007). Assim, o sistema **VANT** deve ser capaz de executar uma grande variedade de missões com pequeno tempo de reconfiguração (arquitetura hardware/software) e ser economicamente viável (relação entre carga útil e autonomia).

Na literatura, alguns **VANTs** são concebidos com estruturas relativamente acessíveis (Park *et al.*, 2012), para atuar com maior agilidade e manobrabilidade, capazes de operar em ambientes degradados (Mellinger *et al.*, 2011; Mahony *et al.*, 2012), tais como rajadas de vento (Alexis *et al.*, 2010). Há vários tipos de configurações “multirrotor”, entre deles nomeados como trirrotor, quadrirrotor³ e hexarrotor. Ao contrário do helicóptero convencional com um rotor principal de passo variável, os rotores empregados constituem-se de pás de passo fixo, de tal forma que as veloci-

¹do inglês *Unmanned Aerial Vehicle (UAV)*.

²do inglês *Decolagem e Pouso Vertical (Vertical Takeoff and Landing) (VTOL)*.

³do inglês *quadrotor*.



Figura 1.1: VANT/VTOL hexarrotor.

dades são ajustadas para alcançar o controle do veículo. Este tipo de veículo é um sistema mecatrônico **MIMO**, sub-atuado, não linear e com estrutura acoplada. As forças de empuxo geradas pelos atuadores são as variáveis de entrada e as variáveis de atitude e posição são as saídas do sistema (Fan *et al.*, 2010; Bouabdallah *et al.*, 2007).

A configuração quadrirrotor é um tipo de helicóptero, considerado como uma classe especial de veículo aéreo com quatro rotores como fonte principal de propulsão. Este veículo, que é propício a ser usado em deslocamentos pequenos de voo pairado, não requer ligações mecânicas complexas na sua estrutura e a relação carga/empuxo faz dele um bom candidato para inspeção e outras tarefas, por exemplo, a aplicação de supervisão e detecção aérea de deficiências em plantas de petróleo e gás, onde reduz o custo e o risco com vidas humanas para tais tarefas de maneira significativa (Tayebi e McGilvray, 2006; Bouabdallah *et al.*, 2007).

O hexarrotor ou veículo com três eixos de rotores coaxiais e contrarrotativos, como é visto na figura 1.1, é um tipo de helicóptero que consiste de eixos rígidos que são equidistantes do seu centro de massa, onde os seis rotores de propulsão estão dispostos como três pares coaxiais e sem engrenagens. Uma vantagem, frequentemente citada, na concepção de rotores coaxiais contrarrotativos aplicado a um helicóptero é que o diâmetro total pode ser reduzido, sendo que os vetores de empuxo são dirigidos verticalmente para cima e assim cada rotor proporciona uma contribuição máxima para o impulso vertical, compensando o efeito de guinada e superando o peso do

veículo. Além disso, não há necessidade de um rotor de cauda como é no helicóptero convencional, visto que toda a potência dos rotores é dedicada para fornecer um desempenho útil, e, que nenhuma potência significativa é desperdiçada com reações de antitorque e o controle direcional (Leishman e Ananthan, 2006). A capacidade associada de estabilizar o movimento dos rotores contrarrotativos em relação a um ambiente dinâmico móvel exige um sofisticado sistema de controle que opere sobre condições de voo quase estacionário (Sanca *et al.*, 2010c).

Backstepping é um esquema recursivo baseado na técnica de *Lyapunov*, proposto no início de 1990, para uma classe de sistemas realimentados estritos. A técnica foi amplamente abordada por Krstić, Kanellakopoulos and Kokotović (Krstić *et al.*, 1995). Com este método, a construção de leis de controle realimentado é feita com auxílio das funções candidatas de Lyapunov, seguindo um procedimento passo a passo sistemático. O método pode evitar cancelamentos de não linearidades úteis e introduz novos termos não lineares com o objetivo de melhorar o desempenho transitório, alcançar a regulação e as propriedades de rastreamento (Zhou e Wen, 2008). As equações de movimento de um corpo rígido contém a translação e a rotação, e, satisfaz uma forma estrita de realimentação. Estes fatos fizeram a técnica backstepping popular em sistemas de controle de voo. No entanto, as expressões analíticas derivadas de pseudo variáveis controláveis são geralmente complicadas ou desconhecidas, especialmente para sistemas de grau elevado ou incertos, limitando a técnica backstepping para aplicações práticas (Pollini e Metrangolo, 2008). Modelos dinâmicos de hexarrotos podem se encontrar em (Yin *et al.*, 2010; Yoo *et al.*, 2010; Sanca *et al.*, 2010c). Modelos dinâmicos para quadrirrotores com ligeiras modificações no torque giroscópico e o controlador de rastreamento de trajetória com a técnica backstepping são encontradas em (T.Hamel *et al.*, 2002; McKerrow, 2004; Sanca *et al.*, 2008). O rastreamento de trajetória combinando a estrutura em cascata com o backstepping e o modo deslizante são apresentadas em (Bouabdallah e Siegwart, 2005; Madani e Benallegue, 2006b), a técnica mostrou-se robusta ao atrito aerodinâmico desconhecido integrado na dinâmica modelada, e garantiu a estabilidade assintótica em malha fechada. A dinâmica do quadrirrotor foi dividida em três subsistemas interconectados: sub-atuado, atuado e os rotores para o projeto do controle de rastreamento de trajetória por backstepping em (Madani e Benallegue, 2006a). O projeto de estimação com base no modelo diferenciador em modo deslizante foi

aplicado para estimar as leis de controle virtuais em (Madani e Benallegue, 2007). O método tenta resolver o problema encontrado frequentemente na implementação computacional de controle backstepping, que é o cálculo das derivadas das variáveis controladas. Um controlador por backstepping robusto baseado na ideia de estabilidade prática, ao invés do critério de estabilidade por Lyapunov, é encontrado em (Pollini e Metrangolo, 2008), para lidar com não linearidades, distúrbios de medição, ruído nos sensores e falha dos atuadores. Além disso, a estabilização de atitude usando um controlador **PD**² sobre uma descrição em quatérnios, solução adotada com frequência em problemas de controle de atitude de corpos rígidos, é apresentada em (Tayebi e McGilvray, 2006). O clássico **PID** e o algoritmo **LQR** foram aplicados, respectivamente, para a estabilização de atitude do quadricóptero em (Bouabdallah *et al.*, 2004).

1.1 Definição do Problema

Basicamente, os **VANTs** podem ser pilotados automaticamente por um Sistema de Controle de Voo (**SCV**)⁴, implementados no computador embarcado (Pastor *et al.*, 2007). O sistema lê as informações a partir de um conjunto de sensores e aciona os rotores do multirrotor de acordo com a específica missão de voo. No entanto, a capacidade de navegar em ambientes dinâmicos é fortemente afetada pela imprecisão e a falta de robustez dos sensores. Os pesquisadores começaram a considerar diferentes fontes sensoriais, capazes de fornecer quantidades possíveis de informações úteis, aliadas às técnicas de fusão de sensores, a fim de obter precisão na medição ou estimação de variáveis físicas. Alguns destes sistemas incorporam, por exemplo: a visão computacional; uma unidade de medida inercial⁵ (girômetros, acelerômetros e magnetômetros); um sistema de posição global⁶; altímetros; sonares para a estimação da pose (atitude e posição) do veículo, permitindo assim a navegação.

Na modelagem dinâmica, várias estratégias de controle do quadricóptero foram testadas com modelos nominais ou simplificadas, desconsiderando as perturbações externas (ruído dos sensores, carga adicional e vento), a incerteza paramétrica, as não linearidades de entrada, gerando um desempenho limitado quando se trata de

⁴do inglês *Flight Control System* (**FCS**).

⁵do inglês *Unidade de Medida Inercial* (Inertial Measurement Unit) (**IMU**)

⁶do inglês *Sistema de Posicionamento Global* (Global Positioning System) (**GPS**)

problemas de controle reais. Algumas estratégias não são suficiente robustas, resultando em erros de regime elevados, que são imprevisíveis e incontroláveis. Em (Raffo *et al.*, 2008), uma estratégia de controle não linear robusto para resolver o problema de rastreamento de caminho para um quadricóptero é apresentado. A estrutura de controle é realizada através de um controlador não linear \mathcal{H}_∞ para estabilizar a atitude, considerando distúrbios de momento limitados e observados nos termos da matriz de inércia. Um controlador adaptativo não linear que compensa a incerteza na massa do veículo foi apresentado em (Huang *et al.*, 2010), onde o desempenho dos atuadores com relação a não linearidade de saturação não é abordada. De acordo com Azinheira e Moutinho (2008), visando enfrentar as devidas limitações de atuação, a saturação foi introduzida no projeto do controlador.

Tal como é evidenciado na literatura, há soluções para problemas particulares e o desenvolvimento de um modelo que represente o comportamento real de um veículo aéreo do tipo hexaróptero é complexo, tanto em sua representação, como também na sua implementação em tempo real. Aliadas aos fenômenos físicos complexos a serem modelados, em geral, apelam-se a representações simplificadas, que quando validadas são apenas para situações específicas. Outro fator que gera um problema maior é a correlação entre os parâmetros e seu desacoplamento, em geral, modifica o comportamento real do sistema. Por outro lado, no desenvolvimento do controlador, na técnica backstepping, um dos problemas, ainda não coberto, é a determinação dos limites dos ganhos de controle, que, combinado às variações paramétricas e às incertezas das medições, torna instável o sistema de controle. Assim, um dos objetivos desta Tese é determinar os limites para os ganhos e estabelecer as faixas para o sistema de controle com erro limitado dentro de uma região de convergência também limitada.

1.2 Proposta e Contribuições da Tese

Neste documento, o desenvolvimento do modelo dinâmico de um veículo hexaróptero, considerando as não linearidades de entrada e o projeto de um controlador robusto por backstepping são apresentados. O modelo dinâmico é expresso usando as leis de *Newton-Euler*, mantendo suas particularidades e incluindo não linearidades de entrada. Este novo modelo tem como objetivo obter uma melhor repre-

sentação matemática do sistema mecânico para a análise e o projeto do sistema de controle, não apenas quando ele está pairando, mas, também quando decola, pousa verticalmente, ou voa executando uma tarefa determinada. Duas não linearidades de entrada são consideradas, a zona morta e a saturação, onde o efeito gravitacional e as restrições físicas inerentes dos rotores são relacionados e abordados. O **VANT** hexarrotor experimental desenvolvido neste trabalho está equipado com uma unidade **IMU**/sonar, que devidamente instrumentada fornece as medidas de atitude e altitude. Em seguida, contribui-se com o projeto de um estimador de atitude usando quatérnios e baseado em filtro de Kalman estendido com o objetivo de estabilizar o **VANT**. Para o projeto do controlador, em cada uma das medições obtidas foram consideradas o valor ideal com a adição de um viés desconhecido e mais um ruído branco desconhecido. Nesta contribuição, o controlador de atitude e altitude, com características limitadas, foi obtido a partir da técnica de estabilidade robusta prática que lida com a convergência dentro de uma região limitada não nula, levando em conta algumas suposições. A técnica de análise de Lyapunov foi usada para provar a estabilidade do sistema em malha fechada, calcular os limites sobre os parâmetros dos ganhos do controlador e a garantia pretendida sobre dinâmica da atitude, o erro de rastreamento assintótico na presença de distúrbios nas medidas. Finalmente, as leis de controle foram testadas em simulações numéricas e no hexarrotor experimental, desenvolvido no Laboratório de Robótica da **UFRN**.

1.3 Justificativa

A robótica aérea é um campo de pesquisa bastante ativo na comunidade científica. Muitos trabalhos que utilizam **VANTs** nas diferentes áreas de aplicação têm surgido a cada dia, mostrando cada vez mais o avanço tecnológico na área. A simplicidade e o baixo custo no desenvolvimento do projeto são considerados como fatores preponderantes. Em alguns casos esses fatores comprometem a eficiência e a qualidade dos resultados, e por consequência, a segurança da navegação do veículo aéreo.

O estudo de veículos aéreos autônomos se intensificaram há mais de uma década nos diferentes laboratórios de pesquisa de diferentes universidades do mundo. O número de projetos cresce desmesuradamente para os diferentes tipos de aeronaves (Altuğ *et al.*, 2002; Altuğ *et al.*, 2003; Altuğ e Taylor, 2004; Guenard *et al.*, 2005;

Altuğ *et al.*, 2005; Wang *et al.*, 2005; Escareño *et al.*, 2006; Yu *et al.*, 2007; Romero *et al.*, 2007; He *et al.*, 2008; Dierks e Jagannathan, 2010; Mahony *et al.*, 2012). Isto é devido ao recente desenvolvimento consolidado da microeletrônica, a tecnologia dos sensores e atuadores, gerando um salto no desenvolvimento, especificamente, de microrrobôs aéreos, tecnologia amplamente usada hoje em dia. Muitos projetos de pesquisa são baseados em modelos disponíveis comercialmente, modificados e dotados de instrumentação dedicada como os da Draganflyer (Draganfly Innovation Inc, 2010), o Microdrone (Microdrones GmbH, 2007) e o ArDrone (Parrot SA., 2012).

Dentro do estudo, foi decidido desde o começo do projeto de supervisão aérea, uma configuração especial de **VANT**, o hexarrotor. O interesse não vem só a partir de sua dinâmica que representa um problema atrativo de controle, mas, também a partir da concepção do sistema em questão, envolvendo a integração dos diferentes tipos sensores/atuadores e o projeto de uma lei de controle que o tornem autônomo em missões de inspeção. O hexarrotor deve possuir a capacidade de sobrevoar ambientes dinâmicos, executando uma determinada tarefa de forma autônoma enquanto realiza uma missão. A missão do veículo aéreo é garantida através de sua localização no espaço com precisão. Um grande problema está, de fato, em projetar um sistema de controle para ambientes não estruturados ou desconhecidos que permita a sua localização e a navegação no espaço tridimensional.

Para o controle do hexarrotor, neste documento são apresentados o desenvolvimento de um modelo dinâmico incluindo as não linearidades de entrada, um estimador de atitude em tempo real a partir da fusão dos sensores e o projeto de um controlador robusto não linear com base na fusão de sinais medidos pelos sensores, de forma a possibilitar a navegação com capacidade de supervisão e inspeção aérea.

1.4 Estrutura do Texto

O texto está organizado da seguinte forma:

- Uma breve introdução é fornecida no Capítulo 1.
- O desenvolvimento do modelo dinâmico do **VANT** hexarrotor, incluindo as não linearidades de entrada dos tipos zona morta e saturação é apresentada no Capítulo 2.

- Um método de estimação de atitude usando quatérnios e baseada no Filtro de Kalman Estendido (**FKE**) para o controle e estabilização da atitude do hexarrotor é apresentado no Capítulo 3.
- Um controlador robusto para medições com ruído, usando a técnica por backstepping é apresentada no Capítulo 4. Os resultados das simulações numéricas e dos resultados experimentais obtidos mostram um bom desempenho do controlador proposto para o **VANT** hexarrotor.
- Finalmente no Capítulo 5, são apresentadas algumas conclusões e os possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem Cinemática e Dinâmica do VANT Multirrotor

Neste capítulo, o desenvolvimento da modelagem matemática do VANT hexarrotor é introduzido. Inicialmente, o fundamento da aerodinâmica do rotor em voo axial é discutido e uma breve descrição do empuxo leva ao estudo das forças e momentos atuantes no rotor. Em seguida, o modelo matemático é obtido a partir da estrutura cinemática e dinâmica, representada em equações no espaço de estados.

2.1 Introdução

GERALMENTE, o modelo matemático que represente o comportamento físico de um VANT é complexo e tem um conjunto de parâmetros que não podem ser determinados diretamente. A modelagem baseada no princípio físico-mecânico é um assunto não trivial e requer um extensivo procedimento de refinamento e validação, antes que se possa prever o comportamento dinâmico da aeronave com confiabilidade e precisão.

Na literatura, apenas os mais simples pressupostos de comportamentos aerodinâmicos são realizados a fim de obter uma apreciação para as características dos rotores. Apesar da significativa flexibilidade das pás em muitas publicações a modelagem é feita considerando que as pás são rígidas com simplificações na sua análise (Bramwell *et al.*, 2001). Recentemente, o interesse crescente em Veículos Aéreos Não Tripulados (VANT)s, pela comunidade científica, mostrou-se a favor de um

VANT/VTOL de asas rotativas, que por suas características de voo, permitem executar várias tarefas de monitoramento próximo aos alvos em análise. O multirroto é uma classe especial de **VANT/VTOL** (Altuğ *et al.*, 2005; Tayebi e McGilvray, 2006; Bouabdallah *et al.*, 2007; Bethke *et al.*, 2008), e para o projeto de controle é fundamental dispor de um modelo matemático do mesmo. Modelos são, na prática, formas de representação da realidade. Existem diversos tipos ou formas de representá-los dependendo do seu objetivo de uso.

2.2 VANT Hexarroto

Recentemente, um interesse crescente no desenvolvimento de **VANTs** tem surgido na comunidade científica. Um tipo de veículo aéreo com forte potencial é o helicóptero multirroto, classe especial de seis rotores, também chamado hexarroto. A configuração do hexarroto não requer complexas ligações mecânicas para a atuação dos seus rotores e sua relação de carga/empuxo o torna um bom candidato para as tarefas de inspeção e supervisão aéreas de plantas de petróleo e gás, detecção de vazamentos em dutos e a análise de defeitos próximos ao local afetado, a supervisão junto à linhas de transmissão de energia, o que reduz o custo e o risco com vidas humanas (Bouabdallah *et al.*, 2007).

Sendo um sistema sub-atuado e dinamicamente instável, o hexarroto tem um comportamento dinâmico não linear e com não linearidades de entrada em seus atuadores. Alguns trabalhos encontrados na literatura usam modelos simplificados, onde seus efeitos não lineares e o desempenho dos atuadores são ignorados (Tayebi e McGilvray, 2006; Altuğ *et al.*, 2005). Além dessa complexidade funcional, os algoritmos que são implementados em hardware embarcado são limitados em processamento, evitando tarefas complexas (Pastor *et al.*, 2007).

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento da modelagem cinemática e dinâmica de um hexarroto, incluindo as não linearidades de entrada dos atuadores.

2.2.1 Não Linearidades de Entrada

A Saturação, a zona morta, a folga e a histerese, são os tipos mais comuns de não linearidades de entrada de muitos sistemas de controle mecânico com atuadores (Tao

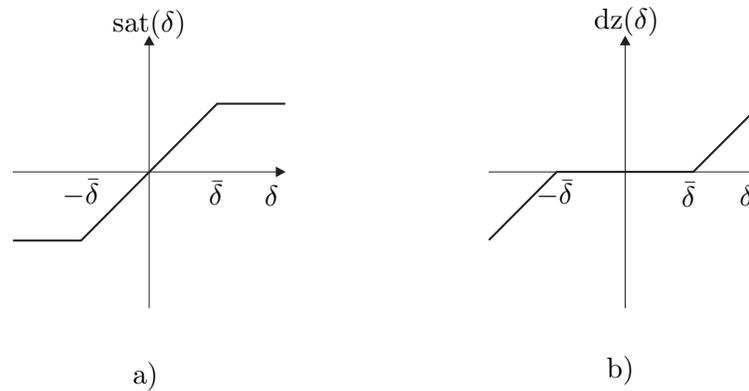


Figura 2.1: Não linearidades de entrada: a) saturação e b) zona morta.

e Kokotović, 1996). A não linearidade de tipo saturação, mostrada na figura 2.1(a), existe em quase todo sistema de controle. A saturação do atuador não só degrada o controle, mas também, pode levar a instabilidade desde que a malha de controle é quebrada em tal situação. Um termo geral para este fenômeno é o reset *windup* (Park e Choi, 1997). A função não linear do tipo saturação pode ser expressa por:

$$\text{sat}_{\bar{\delta}}(\delta) = \begin{cases} \text{sgn}(\delta)\bar{\delta} & \text{se } |\delta| > \bar{\delta}; \\ \delta & \text{se } |\delta| \leq \bar{\delta}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. $\text{sat}(\cdot)$ denota a função de saturação simétrica com seu valor limiar $\bar{\delta}$ e entrada δ , $\forall \delta \in \mathbb{R}$.

A Zona morta, mostrada na figura 2.1(b), é uma não linearidade estática que descreve a insensibilidade do sistema para pequenos sinais, tendo indesejáveis efeitos no desempenho da malha de controle. Representa uma “perda de informação” quando o sinal está dentro da zona morta, causando ciclos limite e o erro de rastreamento. A função pode ser expressa por:

$$\text{dz}_{\bar{\delta}}(\delta) = \delta - \text{sat}_{\bar{\delta}}(\delta), \quad (2.2)$$

onde $\text{dz}(\cdot)$ denota a não linearidade de zona morta.

Quando se trabalha com sistemas mecânicos em movimento, tais como os motores *brushless DC* e outros dispositivos, onde o objetivo é realizar uma determinada tarefa específica no espaço de trabalho, geralmente a precisão e a exatidão requeridas são altas. Em muitos sistemas práticos a combinação destas duas não linearidades,

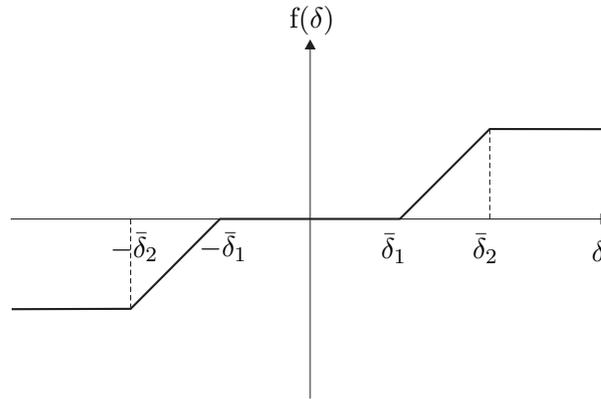


Figura 2.2: Combinação das não linearidades de entrada dos tipos zona morta e saturação.

como é ilustrada na figura 2.2, pode ser expressa por:

$$f(\delta) = \text{sat}_{\bar{\delta}_2}(dz_{\bar{\delta}_1}(\delta)), \quad (2.3)$$

onde os valores limiares $\bar{\delta}_1$ e $\bar{\delta}_2 \in \mathbb{R}$, com $\bar{\delta}_2 > \bar{\delta}_1 > 0$, caracterizam o comportamento das não linearidades de entrada, resposta forçada. A determinação dos valores limiares é fundamental para o projeto de controle.

2.2.2 Aerodinâmica do Rotor em Voo Axial

O rotor é um conjunto de vários corpos rígidos e flexíveis, acoplados através de dobradiças ou juntas elastoméricas com características amortecedoras concebido como um “disco atuador”, o qual produz um empuxo pela condução de uma coluna de ar em direção oposta ao movimento axial. A relação existente entre o empuxo produzido e a velocidade do ar pode ser obtida pela aplicação da lei da conservação da massa, momento e energia. Esta aproximação é referenciada à teoria de momentos (Bramwell *et al.*, 2001; Seddon, 1990).

Na aerodinâmica do disco, algumas considerações são adotadas: O empuxo gerado pelo rotor (disco atuador) que é uniformemente distribuído, o rotor tem um número infinito de pás e o fluxo de ar no rotor é claramente definido como uma massa movendo-se e sem distúrbios.

A figura 2.3, mostra uma superfície cilíndrica de controle de volume de ar com raio R_1 , que inclui o rotor (disco atuador) com raio R , para aplicação dos princípios

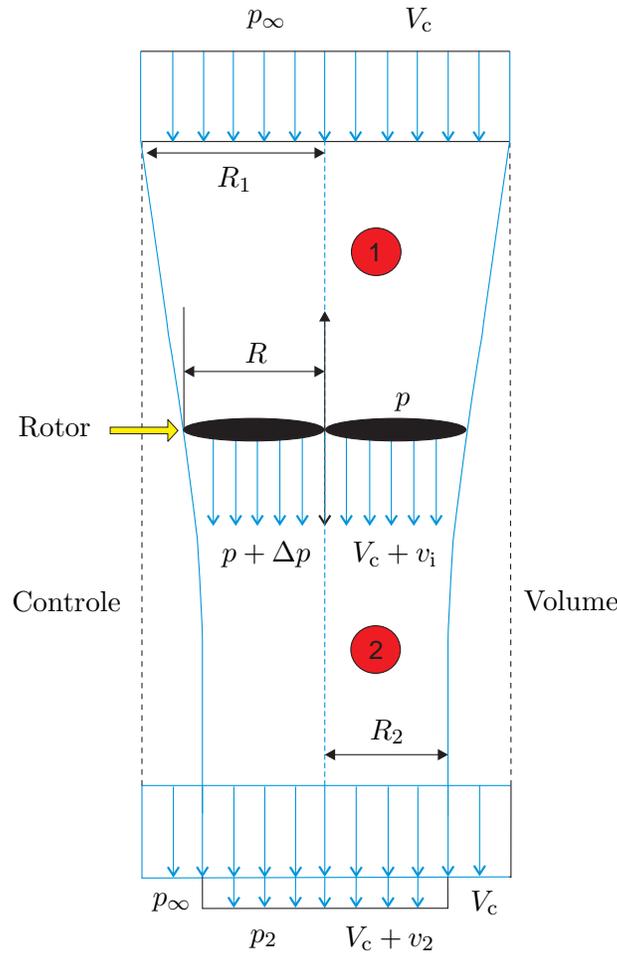


Figura 2.3: Fluxo do ar no rotor em voo axial.

de momentos. A velocidade relativa do ar no rotor é V_c , que corresponde a razão de subida, a pressão ambiente p_∞ . O ar que se aproxima ao rotor se incrementa resultando em, $V_c + v_i$, sendo v_i a velocidade induzida do ar, gerando uma diferença de pressão Δp e um empuxo $T = \Delta p A$. Sendo, $A = \pi R^2$ área do disco, o fluxo de ar circula até atingir $V_c + v_2$ com raio R_2 e pressão p_2 . Pela conservação do momento na direção axial, o empuxo é expresso da seguinte forma (Bramwell *et al.*, 2001).

$$T = \rho \pi R_2^2 (V_c + v_2) v_2 + \pi R_2^2 (p_2 - p_\infty) \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade do ar. Para continuidade do fluxo exige-se que

$$\rho (V_c + v_i) A = \rho (V_c + v_2) \pi R_2^2 \quad (2.5)$$

Equacionando (2.4) e (2.5) tem-se

$$\frac{T}{A} = \rho(V_c + v_i)v_2 + \frac{(p_2 - p_\infty)(V_c + v_i)}{(V_c + v_2)} = \Delta p. \quad (2.6)$$

Aplicando-se a equação de Bernoulli na região 1 do rotor,

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_c^2 = p + \frac{1}{2}\rho(V_c + v_i)^2; \quad (2.7)$$

e na região 2,

$$p + \Delta p + \frac{1}{2}\rho(V_c + v_i)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(V_c + v_2)^2; \quad (2.8)$$

subtraindo a equação (2.7) de (2.8) obtém-se,

$$\Delta p = p_2 - p_\infty + \rho(V_c + \frac{1}{2}v_2)v_2. \quad (2.9)$$

Equacionando (2.6) e (2.9),

$$(p_2 - p_\infty) \left(\frac{v_2 - v_i}{V_c + v_2} \right) = \rho \left(v_i - \frac{1}{2}v_2 \right) v_2 \quad (2.10)$$

Supondo para um disco atuador, onde a pressão do ar no começo e no final do cilindro é a mesma, pressão ambiente, com $p_2 - p_\infty = 0$. Então,

$$v_i = \frac{1}{2}v_2 \quad (2.11)$$

e o empuxo é expresso como

$$T = 2\rho A(V_c + v_i)v_i. \quad (2.12)$$

Um caso particular é para o voo pairado quando $V_c = 0$

$$T = 2\rho A v_i^2. \quad (2.13)$$

A orientação do vetor empuxo do rotor T é expresso usando os ângulos lateral e longitudinal a and b (figura 2.4) (Dzul *et al.*, 2002). Logo, o empuxo pode ser expresso como um vetor relativo ao corpo do veículo:

$$T = \vartheta_m |T| \quad (2.14)$$

com o vetor unitário na direção de sustentação do rotor dado por:

$$\vartheta_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b}} \begin{bmatrix} \sin a \cos b \\ \cos a \sin b \\ \cos a \cos b \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

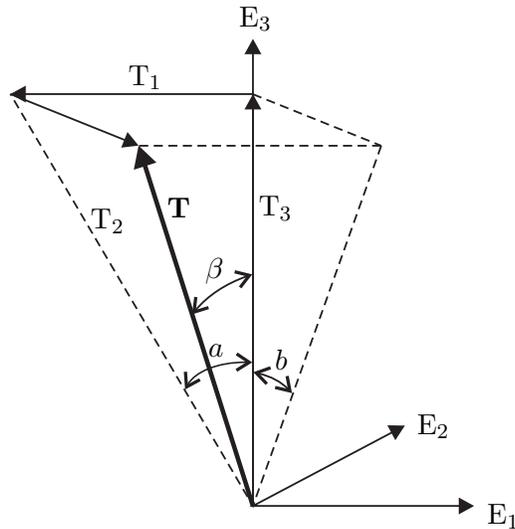


Figura 2.4: Vetor empuxo.

Considerando-se os ângulos desprezíveis, ϑ_m pode ser reescrita como: $\vartheta_m = [a, b, 1]^T$. Em seguida, o vetor de sustentação do rotor T está inclinado em relação ao eixo do rotor (Dzul *et al.*, 2002)

$$T = |T|\vartheta_m = |T| \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

2.2.3 Dinâmica da Pá em Voo Axial

Na figura 2.5 são ilustradas as velocidades e as forças que agem sobre uma seção da pá do rotor. As forças e os momentos aerodinâmicos são derivados usando a análise da pá e a teoria do empuxo (Bramwell *et al.*, 2001; Seddon, 1990). A figura 2.5a é uma vista de cima do rotor (disco atuador). A rotação da pá é definida em sentido anti-horário com velocidade angular ω . O raio da pá é definido por R , sendo a velocidade da ponta da pá igual a ωR . Uma seção da pá com largura dr é tomada a uma distância r , com comprimento de corda c . A figura 2.5b ilustra o fluxo visto pela seção da pá, com ângulos referenciados ao plano de impulsão (do inglês *hub plane*), que é perpendicular ao eixo do rotor. θ_b é o ângulo de passo da pá e é medido entre a corda c da pá e o plano de impulsão. A velocidade do ar, que circula pela pá, tem dois componentes: $(V_c + v_i)$ com velocidade induzida do ar pelo rotor que é perpendicular ao plano de impulsão e ωr , que é perpendicular ao movimento

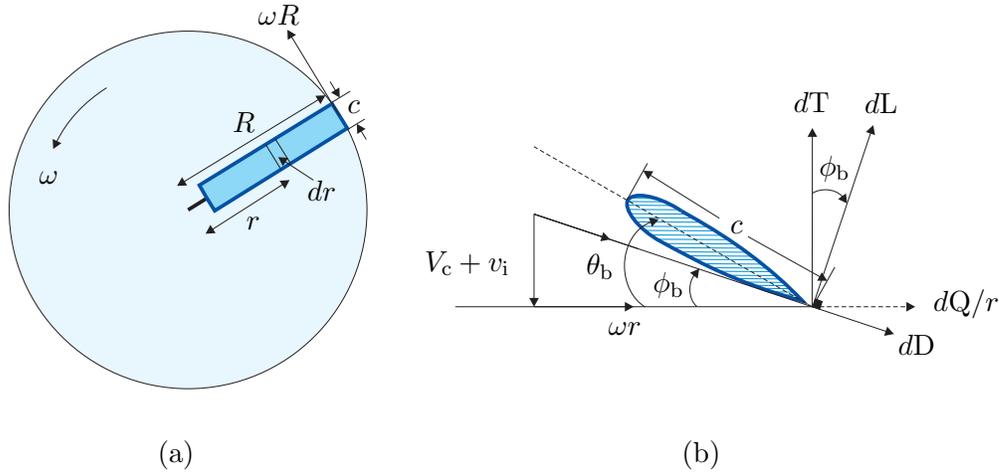


Figura 2.5: Componentes das forças sobre uma seção da pá do rotor em voo vertical.

vertical. ϕ_b é o ângulo de influxo. dT , dQ , dL e dD são a força de empuxo, o torque, a sustentação, e o arrasto respectivamente (Bramwell *et al.*, 2001; Seddon, 1990).

O empuxo e o torque, pela conservação de momentos são escritos como:

$$\begin{cases} T(t) = \rho C_T A R^2 (\omega(t))^2; \\ Q(t) = \rho C_Q A R^3 (\omega(t))^2, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde, C_T e C_Q são os coeficientes de empuxo e torque respectivamente, ρ é o coeficiente de densidade do ar, e A é a área do disco. Os coeficientes de empuxo e torque podem ser expressos como:

$$C_T = \frac{1}{4} \sigma C_{L\alpha} \left[\frac{2\theta_b}{3} - (\lambda_c + \lambda_i) \right]; \quad (2.18)$$

$$C_Q = \frac{1}{2} \sigma \left[C_{L\alpha} (\lambda_c + \lambda_i) \left\{ \frac{\theta_b}{3} - \frac{\lambda_c + \lambda_i}{2} \right\} + \frac{C_D}{4} \right], \quad (2.19)$$

onde σ é o fator de solidez, $C_{L\alpha}$ é o coeficiente de sustentação, C_D é o coeficiente de arrasto e λ_c , λ_i são os fatores de influxo descritos em (Bramwell *et al.*, 2001).

$$\lambda_c = \frac{V_c}{\omega R}; \quad (2.20)$$

$$\lambda_i = \frac{v_i}{\omega R}. \quad (2.21)$$

2.2.4 Máquinas de Corrente Contínua sem Escovas

A máquina Corrente Contínua Sem Escovas (*BrushLess Direct Current*) (**BLDC**) é um tipo de motor síncrono comandado eletronicamente, e tem sido muito usada

em aplicações de robótica nos últimos anos. As vantagens deste tipo de atuadores incluem alta confiabilidade, maior potência e melhor desempenho comparado com o *brushed* (Fang *et al.*, 2007), motor com escovas. O rotor é construído de ímãs permanentes, e sua inércia é menor comparado com os outros tipos de motores. Isto melhora a aceleração e desaceleração, características comuns em curtos ciclos de operação.

Uma máquina **BLDC** é construída para operar em dois casos específicos: *inrunner*, onde o ímã permanente corresponde ao rotor e os bobinados (armadura) que rodeiam o rotor, correspondem ao estator; *outrunner* ou conhecido como configuração de rotor externo, onde a relação radial entre o ímã permanente e os bobinados é invertida, neste caso os bobinados são estacionários. Dentro do fluxo axial, onde há limitação de espaço ou tamanho, a estrutura é montada para obter melhor desempenho. Os *outrunners* normalmente têm mais polos instalados, gerando maior torque à baixa velocidade.

Há duas configurações comuns de bobinados: delta e estrela. O motor com bobinado em configuração delta outorga baixo torque em baixa velocidade, mas pode entregar máxima velocidade de rotação. Enquanto, a configuração estrela dá alto torque em baixa velocidade, mas não entrega máxima velocidade de rotação comparada à configuração delta (Salem e Haskew, 1995). Embora a eficiência é dependente da construção do motor, a configuração estrela é normalmente mais eficiente do que a configuração delta. Além disso, os bobinados em delta geram correntes elétricas parasitas em alta frequência no motor, o que não acontece na configuração estrela, prevenindo essas perdas. Do ponto de vista de controle, as duas configurações são tratadas da mesma forma, apesar de que alguns controladores menos caros são concebidos para atuar com a configuração estrela.

A figura 2.6 apresenta o esquema elétrico de uma máquina **BLDC** e uma unidade de acionamento do motor (Salem e Haskew, 1995). O acionamento comuta a tensão de alimentação das fases da armadura no estator com o objetivo de obter-se movimento rotacional. Embora os elementos da unidade de propulsão do rotor não são modelados no presente documento, os efeitos da ação de comutação é tido em conta. Cada fase da armadura conduz sequencialmente uma corrente de polaridade positiva ou negativa defasada 120 graus em relação às outras correntes, gerando o movimento.

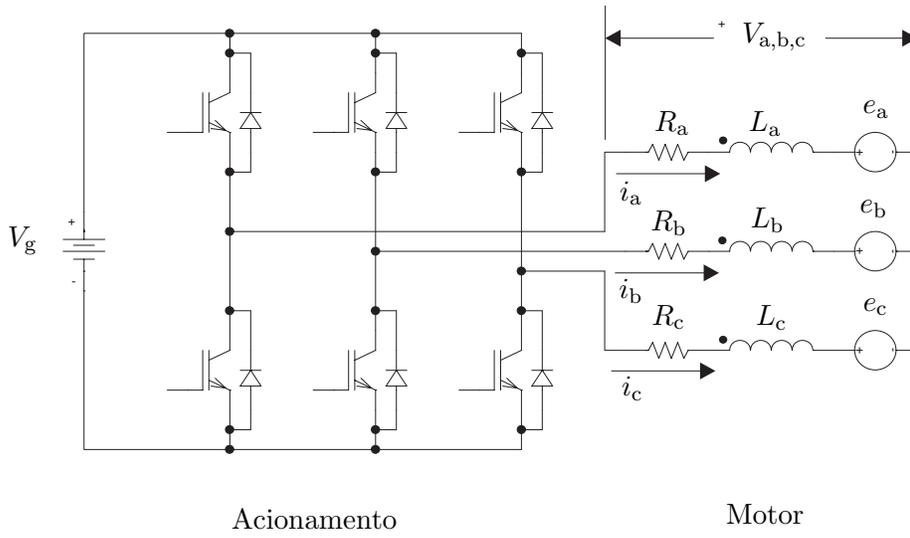


Figura 2.6: Motor **BLDC** com o acionamento e circuito equivalente.

Em condições ideais, o equacionamento do circuito da armadura no estator pode ser descrito pela segunda lei de Kirchhoff da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a - M & 0 & 0 \\ 0 & L_b - M & 0 \\ 0 & 0 & L_c - M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde, V_a, V_b e V_c são as tensões de fase do estator; i_a, i_b e i_c são as correntes da linha trifásica; R_a, R_b e R_c são as resistências de armadura; L_a, L_b e L_c são as auto-indutâncias; M é a indutância mútua; e_a, e_b e e_c são a Força Contra-Eletromotriz (**fcem**) das três fases; e $\frac{d}{dt}$ é um operador diferencial.

Além disso, a equação (2.22), acima, pode ser expressa em forma compacta como:

$$V_g \delta(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + k_e \omega(t), \quad (2.23)$$

onde, $V_g \delta(t)$ são os sinais de tensão **PWM** com larguras de pulso $\delta(t) \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$; $i(t)$ é a corrente de fase; R_m é a resistência de fase equivalente; L_m é a indutância de fase equivalente; k_e é a constante de **fcem**; e $\omega(t)$ é a velocidade angular do motor.

A equação mecânica do motor **BLDC** é dada por:

$$\tau_e - \tau_l = J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t); \quad (2.24)$$

$$\tau_e(t) = k_t i(t); \quad (2.25)$$

onde, τ_e é o torque eletromagnético, τ_l é o torque de carga, J_m é a constante de inércia do motor, k_t é a constante de torque do motor e B é o coeficiente de atrito viscoso.

2.3 Modelagem do **VANT** Hexarrotor

O conceito do hexarrotor surgiu há alguns anos atrás com o protótipo desenvolvido pela Draganfly Innovation Inc. (Draganfly Innovation Inc, 2010). Não obstante, na literatura há uma deficiência de modelos matemáticos que representem o comportamento real para este tipo de veículo e que possibilite o projeto de controladores robustos. O estado de arte usando veículos multirrotores teve um incremento exponencial, dentre delas **VANTs** particulares com diferentes configurações. Nesse sentido, torna-se necessário propor um modelo genérico para este tipo de veículos, promissor para tarefas de navegação indoor/outdoor e uma vasta gama de aplicações, como supervisão próximo aos alvos e a inspeção aérea. Um **VANT** hexarrotor constitui-se por seis rotores, dispostos como três pares coaxiais contrarrotativos, localizados no extremo de três eixos equidistantes do centro de massa, como é ilustrado na figura 2.7. Nos extremos dos eixos, motores **BLDC** de pares coaxiais foram instalados com as pás e sem o uso de caixas de redução, para aumentar o desempenho dos rotores, definindo-se como rotores superiores e inferiores contrarrotativos. Na prática, os rotores superiores e inferiores operam como forças de empuxo individuais e necessárias, mantendo-se balanceado o empuxo e o torque resultante do par coaxial (com mesmo módulo, mas com sentidos opostos). Porém, no caso em que os dois motores estivessem instalados próximos, os rotores girariam substancialmente no mesmo plano com o mesmo empuxo e o mesmo torque, porque ambos rotores compartilham o mesmo valor de grandeza de velocidade induzida (Leishman e Ananthan, 2006; Dzul *et al.*, 2002). Em uma configuração hexarrotor, a melhor estabilidade e a redução de potência para acionar os seis atuadores são algumas das vantagens desta abordagem. Assim, uma carga nominal adicional pode ser incrementada (Sanca *et al.*, 2010c).

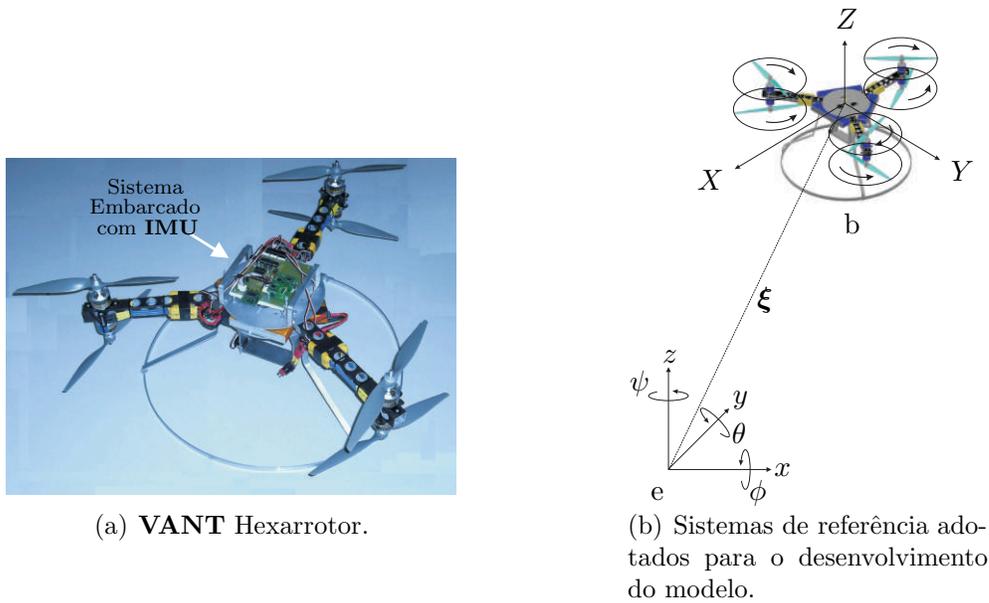


Figura 2.7: Microveículo aéreo desenvolvido no Laboratório de Robótica da **UFRN**.

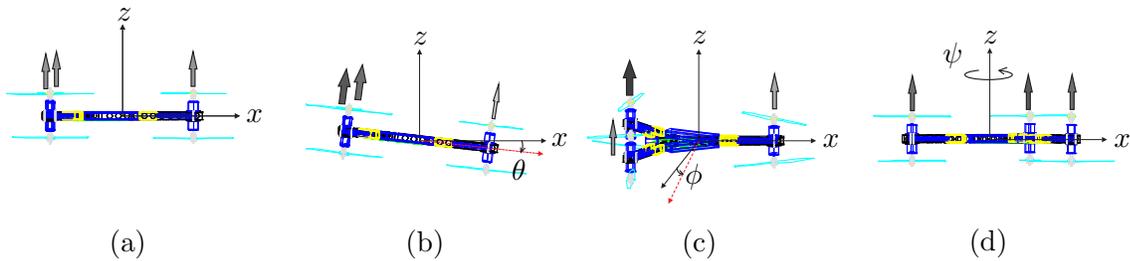


Figura 2.8: Movimentos realizados para o hexarroto: deslocamentos altitudinal, longitudinal, lateral e guinada.

Considerando a figura 2.8(a), os movimentos ascendente/descente são alcançados pelos empuxos resultantes das contribuições individuais de incremento/decremento dos pares coaxiais. Os movimentos longitudinal (figure 2.8(b)), lateral e guinada (figure 2.8(c-d)) são obtidos através de uma estratégia de controle diferencial entre o empuxo gerado pelos pares coaxiais. Por exemplo, se um movimento de guinada é desejado, o empuxo gerado de um conjunto de rotores (superior/inferior) deve ser reduzido e o empuxo gerado dos outros conjuntos (inferior/superior) deve ser proporcionalmente incrementado, mantendo-se o empuxo total gerado no veículo e evitando-se movimentos ascendente/descente. Assim, o movimento de guinada é resultante do torque reativo induzido. Os movimentos longitudinal e lateral são alcançados pela inclinação do veículo na direção desejada.

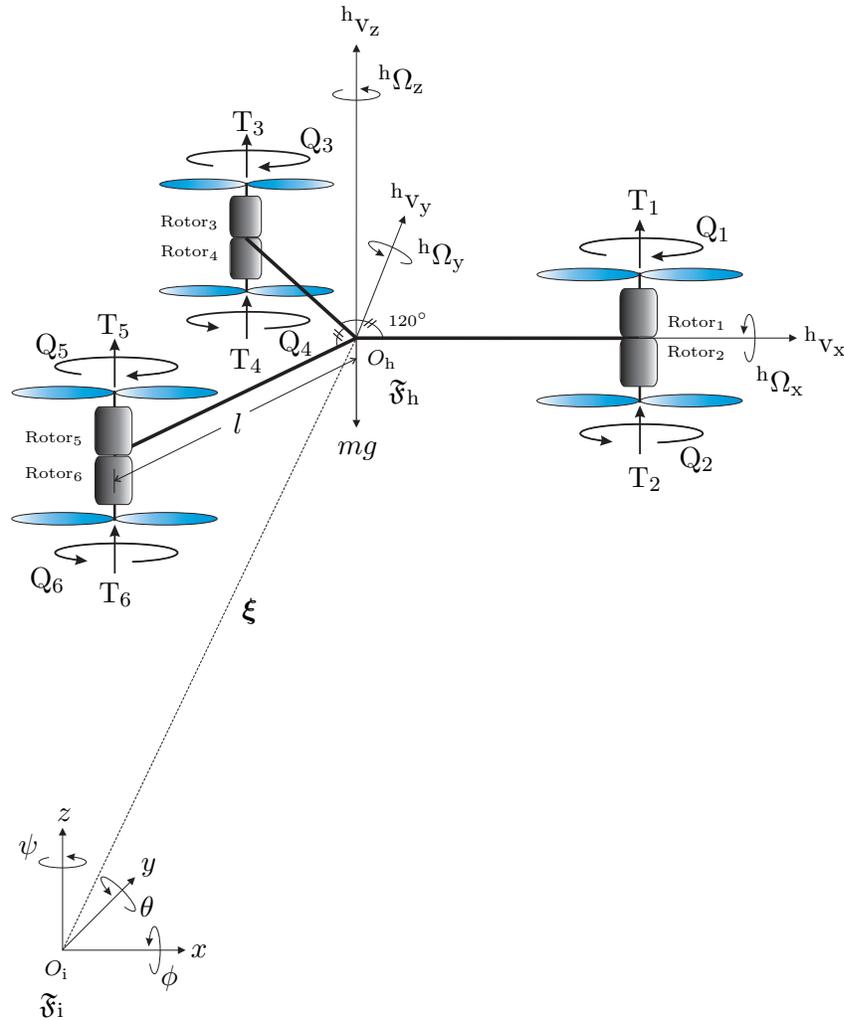


Figura 2.9: Modelagem do **VANT** hexarrotor e seus respectivos sistemas de referência.

Na figura 2.9, \mathfrak{F}_i denota um sistema de referência inercial, e \mathfrak{F}_h denota a referência rigidamente ligado ao corpo do hexarrotor. Além disso, sejam os vetores $\xi \triangleq [x, y, z]^T$ e $\varphi \triangleq [\phi, \theta, \psi]^T$ denotando respectivamente a *posição* e a *atitude* do referencial \mathfrak{F}_h relacionado ao referencial \mathfrak{F}_i . Os ângulos de atitude $\{\phi, \theta, \psi\}$ são restritos respectivamente a $(-\pi/2 < \phi < \pi/2)$, $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ e $(-\pi < \psi < \pi)$, todos pertencentes ao conjunto dos números \mathbb{R} .

Para representar o modelo do hexarrotor e realizar, a partir deste, o projeto de controle, algumas suposições razoáveis são apresentadas a seguir.

Suposição 2.1. *O hexarrotor é considerado uma estrutura rígida e simétrica com*

relação ao seu centro de massa. Conseqüentemente, as equações dinâmicas que descrevem o veículo podem ser obtidas usando-se as leis de Newton-Euler.

Suposição 2.2. As forças e momentos aerodinâmicos são considerados desprezíveis quando o veículo realiza movimentos a baixa velocidade. Além disso, o efeito aerodinâmico de escoamento giratório de padrão circular ou espiral, vórtice gerado pelas pás, o efeito solo, na direção do corpo do hexarroto são desconsiderados (Sanca et al., 2010c).

O movimento do hexarroto pode ser descrito pelas velocidades lineares e angulares relativas à referência \mathfrak{F}_h . Assim, o vetor de velocidade linear é expresso como $\mathbf{V} = [{}^h v_x, {}^h v_y, {}^h v_z]^T$ e o vetor de velocidade angular sendo $\mathbf{\Omega} = [{}^h \Omega_x, {}^h \Omega_y, {}^h \Omega_z]^T$. Os vetores $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ e $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ expressam as velocidades relacionadas ao sistema de referência \mathfrak{F}_i .

A relação entre ambas é expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{R}_t \mathbf{V} \quad (2.26)$$

e

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_r \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (2.27)$$

onde, $\mathbf{R}_t \in \mathbf{SO}(3)$ e \mathbf{R}_r são as matrizes descritas pelos ângulos de Euler e de Tait-Bryan (Fu et al., 1987), que relacionam os sistemas \mathfrak{F}_h e \mathfrak{F}_i , respectivamente.

Usando-se as leis de *Newton-Euler*, o modelo mecânico do hexarroto pode ser expresso por:

$$\mathbf{F}_{\text{prop}} - \mathbf{F}_{\text{aero}} - \mathbf{F}_{\text{grav}} = m \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{\Omega} \times (m \mathbf{V}); \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{prop}} - \boldsymbol{\tau}_{\text{aero}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{J} \mathbf{\Omega}), \quad (2.29)$$

onde, m e $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são a massa e a matriz de inércia do hexarroto; \mathbf{F}_{aero} , \mathbf{F}_{grav} e $\boldsymbol{\tau}_{\text{aero}} \in \mathbb{R}^3$ são as quantidades físicas devido aos efeitos aerodinâmicos e gravitacional, respectivamente. \mathbf{F}_{prop} e $\boldsymbol{\tau}_{\text{prop}}$ em (2.28) e (2.29) são os vetores de empuxo e de momentos (torque de rolagem, arfagem e guinada), gerados pelas três configurações coaxiais, respectivamente. Os vetores podem ser definidos como:

$$\mathbf{F}_{\text{prop}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^6 |\mathbf{T}_i| \end{bmatrix}; \quad (2.30)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{prop}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}l(|\mathbf{T}_3| + |\mathbf{T}_4| - |\mathbf{T}_5| - |\mathbf{T}_6|) \\ \frac{l}{2}(|\mathbf{T}_3| + |\mathbf{T}_4| + |\mathbf{T}_5| + |\mathbf{T}_6| - 2|\mathbf{T}_1| + 2|\mathbf{T}_2|) \\ \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} Q_i \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

As forças e momentos externos em (2.30) e (2.31) resultam principalmente devido ao empuxo dos seis rotores, dispostos em configuração tri-coaxial, como é ilustrada na figura 2.9. Cada rotor produz uma força de empuxo independente $|\mathbf{T}_i|$ e um torque Q_i , sendo $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, calculado pela equação (2.17). l é a distância entre o centro de massa do hexarrotor e o eixo dos rotores coaxiais.

A força de reação aerodinâmica \mathbf{F}_{aero} ; a força de reação gravitacional \mathbf{F}_{grav} , e o torque de reação aerodinâmica $\boldsymbol{\tau}_{\text{aero}}$, que atuam sobre o hexarrotor, nas equações (2.28) e (2.29), podem ser expressos como:

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = \mathbf{K}_t(\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\text{air}}); \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = m\mathbf{R}_t^T \mathbf{G}; \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{aero}} = \mathbf{K}_r(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{air}}), \quad (2.34)$$

onde, $\mathbf{V}_{\text{air}} \in \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{\Omega}_{\text{air}} \in \mathbb{R}^3$ são as velocidades translacionais e rotacionais do ar no sistema de referência \mathfrak{F}_h ; $\mathbf{G} = [0, 0, g]^T$ é o vetor de aceleração da gravidade, quando $g = 9.81\text{m/s}^2$; \mathbf{K}_t e \mathbf{K}_r são duas matrizes diagonais correspondentes aos efeitos aerodinâmicos de atrito linear e rotacional com coeficientes k_t e k_r .

Na estrutura mecânica do hexarrotor, como ilustrado na figura 2.10, seis rotores são dispostos em três pares coaxiais contrarrotativos montados nas extremidades dos três braços. Na interseção é localizada a eletrônica embarcada com a devida instrumentação e as baterias. Conseqüentemente, o momento da matriz de inércia será considerada essencialmente simétrica aos três eixos, sendo $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, o que implica que $\mathbf{J} = \text{diag}([J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}]) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Os parâmetros da matriz de inércia são aproximados, assumindo-se uma esfera densa centralizada com massa m_1 e raio r_1 , e três massas cilíndricas densas m_2 com

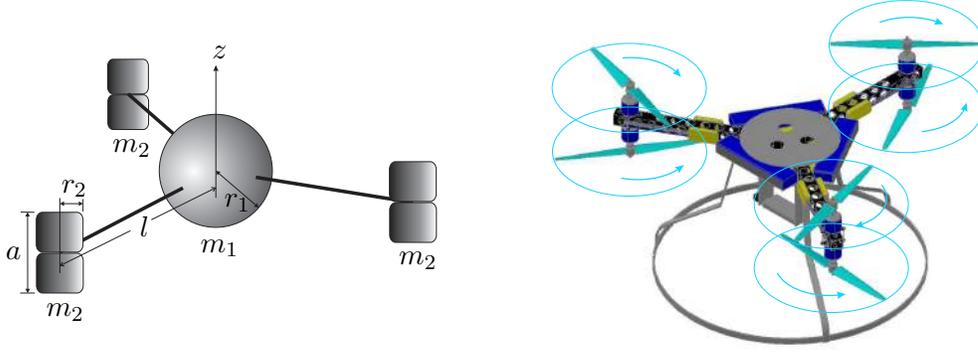


Figura 2.10: Momento de inércia do **VANT** hexarroto.

raio r_2 localizados a uma distância l do baricentro, resultando em:

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{3}{4}m_2r_2^2 + \frac{1}{4}m_2a^2 + \frac{3}{2}m_2l^2;$$

$$J_{zz} = \frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{3}{2}m_2r_2^2 + 3m_2l^2.$$

Derivando as equações (2.26) e (2.27), respeito ao tempo resultam,

$$\ddot{\xi} = \mathbf{R}_t \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{R}}_t \mathbf{V} \quad (2.36)$$

$$\dot{\Omega} = \mathbf{R}_t \dot{\varphi} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \dot{\varphi} \quad (2.37)$$

de (2.36)

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{R}_t^T \left(\ddot{\xi} - \dot{\mathbf{R}}_t \mathbf{V} \right), \quad (2.38)$$

onde, $\dot{\mathbf{R}}_t = \mathbf{R}_t S(\Omega)$, $S(\Omega)$ denota a matriz anti-simétrica, tal que $S(\Omega)\mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{V}$, com operador produto vetorial \times e algum vetor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$.

Usando as equações, (2.32), (2.33) e (2.38) em (2.28), resulta

$$\ddot{\xi} = -\mathbf{G} + \frac{1}{m} \mathbf{R}_t \{ \mathbf{F}_{\text{prop}} - \mathbf{K}_t (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\text{air}}) \}, \quad (2.39)$$

O mesmo procedimento para o componente angular, usando as equações, (2.27), (2.34) e (2.37) em (2.29), resulta

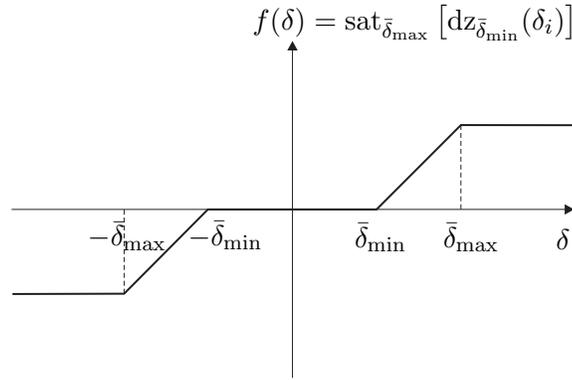


Figura 2.11: Não linearidade de entrada: zona morta e saturação.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} = & -(\mathbf{J}\mathbf{R}_r)^{-1} (\mathbf{R}_r \dot{\phi} \times \mathbf{J}\mathbf{R}_r \dot{\phi}) - \\
 & -\mathbf{R}_r^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \dot{\phi} + \\
 & +(\mathbf{J}\mathbf{R}_r)^{-1} \{ \tau_{\text{prop}} - \mathbf{K}_r (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{air}}) \}, \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

onde, os vetores de empuxo e de torque, podem ser expressos em função das velocidades angulares dos rotores como:

$$\mathbf{F}_{\text{prop}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho C_T A R^2 \sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \end{bmatrix}; \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{prop}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} l \rho C_T A R^2 (\omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2) \\ \frac{l}{2} \rho C_T A R^2 (\omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2) \\ \rho C_Q A R^3 \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \omega_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

em que: l é a distância entre o centróide do veículo e o eixo dos rotores; C_T e C_Q são os coeficientes de empuxo e de torque, respectivamente; ρ é a densidade do ar; A e R são a área e o raio das hélices dos rotores, respectivamente. Os coeficientes de empuxo e de torque são obtidos como sugeridos em (Bramwell *et al.*, 2001; Seddon, 1990).

O modelo dinâmico do **VANT** hexarrotor é expresso pelas equações: (2.39); (2.40); (2.41), e (2.42). O modelo descreve um sistema Multiple-input-multiple-

output (**MIMO**) com seis variáveis de saída $\{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$ e seis entradas correspondentes às velocidades angulares dos rotores $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Apesar de que o hexarroto é constituído por seis rotores e pelo fato de terem os eixos paralelos, só é possível controlar quatro variáveis de saída simultaneamente, sendo o sistema sub-atuado.

Em aplicações práticas de controle, os atuadores, geralmente, contêm não linearidades estáticas ou dinâmicas com parâmetros variantes e desconhecidos, algumas vezes limitando o desempenho do sistema em malha fechada. A saturação, a zona morta, a folga e a histerese são as não linearidades de entrada comuns em sistemas de controle (Tao e Kokotović, 1996). A função que descreve a não linearidade de saturação pode ser expressa de forma genérica como:

Neste trabalho, os atuadores são motores **BLDC**, comandados por sinais **PWM**. Com isso, os sinais ω_i 's nas equações (2.41) e (2.42), para $i = 1, \dots, 6$; são as velocidades angulares. Estas velocidades angulares podem ser representadas a partir de um modelo dinâmico simplificado, desconsiderando a dinâmica elétrica e com a inclusão de não linearidades de entrada. Tal modelo é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = & -\frac{k_m^2}{R_m(J_m + J_r)}\omega_i - \frac{d}{J_m + J_r}\omega_i^2 + \\ & + \frac{k_m V_g}{R_m(J_m + J_r)} \text{sat}_{\bar{\delta}_{\max}} [dz_{\bar{\delta}_{\min}}(\delta_i)], \end{aligned} \quad (2.43)$$

em que: R_m é a resistência equivalente do enrolamento; k_m é a constante de torque; $J_m + J_r$ é a inércia total visto pelo motor **BLDC**; d é o fator de arrasto da pá; V_g é a tensão de alimentação com o sinal de comando por **PWM**; δ_i é largura de pulso do sinal de comando **PWM**; e $\{\text{sat}_{\bar{\delta}_{\max}} [dz_{\bar{\delta}_{\min}}(\delta_i)]\}$ é a função não linear que descreve a não linearidade de entrada do motor **BLDC**. Na figura 2.11, $\bar{\delta}_{\min}$ e $\bar{\delta}_{\max}$ representam os valores limiares da zona morta e da saturação, respectivamente. Como pode ser visto, o valor limiar muda o comportamento em sua saída frente às diferentes condições entrada δ_i , considerando-se relevante sua compensação. Além disso, notando que, δ_i 's são as variáveis usadas como sinais de entrada dos conjuntos propulsores, girando estritamente em sentido único, estes sinais podem ser limitados como $\delta_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^+$, $i = 1 \dots 6$.

O efeito da zona morta, é considerado quando o **VANT** hexarroto está no solo e que mudanças pequenas de velocidade angular nos rotores não causam a decolagem

do mesmo. O valor limiar da zona morta depende do peso e da carga útil do hexarrotor. Para a saturação, considera-se, um requerido sinal de controle que é maior do que o empuxo gerado pelos atuadores com seus valores limiares que correspondem ao desempenho máximo (Tao e Kokotović, 1996).

As equações dinâmicas podem ser reescritas no espaço de estados de acordo com os seguintes vetores de estado: $\mathbf{x}_1 = [x, y]^T$; $\mathbf{x}_2 = [\dot{x}, \dot{y}]^T$; $\mathbf{x}_3 = [\phi, \theta]^T$; $\mathbf{x}_4 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$; $\mathbf{x}_5 = [z, \psi]^T$; $\mathbf{x}_6 = [\dot{z}, \dot{\psi}]^T$ e $\mathbf{x}_7 = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6]^T$. Obtêm-se as equações em espaço de estados expressas por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_7)\varphi_0(\mathbf{x}_3) \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_3)\varphi_1(\mathbf{x}_7) \\ \dot{\mathbf{x}}_5 = \mathbf{x}_6 \\ \dot{\mathbf{x}}_6 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_3)\varphi_2(\mathbf{x}_7) \\ \dot{\mathbf{x}}_7 = \mathbf{f}_3(\mathbf{x}_7) + \mathbf{g}_3\boldsymbol{\delta} \end{cases} \quad (2.44)$$

onde, $\boldsymbol{\delta} = \text{sat}_{\bar{\delta}_{\max}}([\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_6(t)]^T) \in \mathbb{R}^6$ é um vetor de entrada que representa aos sinais de largura de pulso. As funções não lineares podem ser resumidas como segue:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = -\mathbf{G} - \frac{1}{m}\mathbf{R}_t\mathbf{K}_t\mathbf{R}_t^T\dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{m}\mathbf{R}_t\mathbf{K}_t\mathbf{V}_{\text{air}};$$

$$\begin{bmatrix} f_\phi \\ f_\theta \\ f_\psi \end{bmatrix} = -(\mathbf{J}\mathbf{R}_r)^{-1} \left[(\mathbf{R}_r\dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{J}\mathbf{R}_r\dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{K}_r\mathbf{R}_r\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{J} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} \right) \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right] +$$

$$+ (\mathbf{J}\mathbf{R}_r)^{-1}\mathbf{K}_r\boldsymbol{\Omega}_{\text{air}} + \begin{bmatrix} \frac{\rho C_Q A R^3}{J_{zz}} (\cos \phi \tan \theta) \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \omega_i^2 \\ -\frac{\rho C_Q A R^3}{J_{zz}} (\sin \phi) \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \omega_i^2 \\ \frac{l \rho C_T A R^2}{2J_{yy}} \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \left(\sum_{i=3}^6 \omega_i^2 - 2 \sum_{i=1}^2 \omega_i^2 \right) \end{bmatrix};$$

onde os vetores \mathbf{f}_i ($i = 0, 1, 2$) são,

$$\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f_\phi \\ f_\theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_z \\ f_\psi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} f_{\omega_1} \\ f_{\omega_2} \\ \vdots \\ f_{\omega_6} \end{bmatrix} = -\frac{k_m^2}{R_m(J_m + J_r)} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_6 \end{bmatrix} - \frac{d}{J_m + J_r} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_6^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_0 = \frac{\rho C_T A R^2}{m} \sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{xx}} & \frac{\sin \phi \tan \theta}{J_{yy}} \\ 0 & \frac{\cos \phi}{J_{yy}} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta \cos \phi}{m} & 0 \\ 0 & \frac{\cos \phi}{J_{zz} \cos \theta} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{k_m V_g}{R_m(J_m + J_r)}; \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} l \rho C_T A R^2 (\omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2) \\ \frac{l}{2} \rho C_T A R^2 (\omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} \rho C_T A R^2 \sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \\ \rho C_Q A R^3 \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \omega_i^2 \end{bmatrix}.$$

2.3.1 Resultados Simulados do Modelo Dinâmico Proposto

Nesta subseção, uma visão geral, do simulador de um **VANT** hexarroto implementado no Simulink[®] é introduzido. A figura 2.12 ilustra o esquema em blocos do modelo desenvolvido para o sistema não linear. De acordo com a figura, o modelo

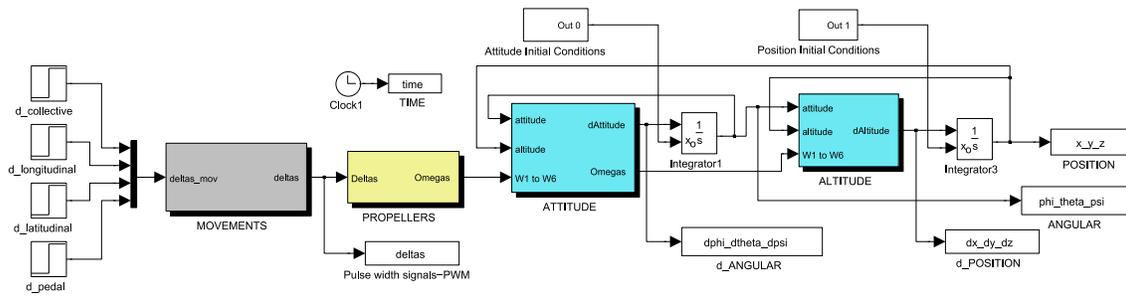


Figura 2.12: Representação do modelo dinâmico e cinemático em simulink[®] para o **VANT** hexarrotor.

Tabela 2.1: Principais parâmetros do hexarrotor.

Symbol	unit
m	4.575kg
g	9.806m/s ²
l	0.325m
ρ	1.293kg/m ³
d	1.6e ⁻⁶ Nm s ²
m_1, m_2	2.144, 0.477kg
r_1, r_2, a	0.1, 0.1, 0.16m
J_{xx}, J_{yy}	90.8e ⁻³ Nm s ² /rad
J_{zz}	173.0e ⁻³ Nm s ² /rad
k_t	4.9e ⁻³ N s/m
k_r	9.5e ⁻⁴ Nm s/rad
C_T	0.0087
C_Q	0.0137
R	0.1524m and $A = \pi R^2$
V_g	14.8V
R_m	0.036Ω
J_m	1.6e ⁻⁵ kg m ²
J_r	1.3e ⁻³ kg m ²
k_m	1.17e - 2kg m/A
V_{iair}, Ω_{iair}	0.1m/s, 0.01rad/s

em malha aberta corresponde a uma estrutura em cascata (altitude e atitude) combinando o desempenho cinemático e dinâmico da estrutura. Os sinais de entrada para o sistema correspondem a sinais de largura de pulso **PWM**, que acionam os motores **BLDC**, através de um circuito eletrônico de potência.

O hexarrotor está equipado com três pares de motores **BLDC** coaxiais contrarrotativos. Cada conjunto coaxial possui hélices de passo fixo rígido, sem mecanismos de redução e acionados por um dispositivo de potência. A tabela 4.2, ilustra o conjunto de parâmetros usados na simulação. As grandezas dos parâmetros usados na simulação foram obtidos a partir de testes experimentais realizados com a estrutura mecânica, além do uso das fichas técnicas de componentes que compõem a estrutura.

A figura 2.13, ilustra um resultado de uma simulação para uma resposta degrau do sistema, onde os sinais de empuxo são acionados para um movimento coletivo (movimento vertical), observando-se como resultado os componentes de aceleração, de velocidade, de posição e orientação. As figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17, ilustram resultados quando componentes de ar linear e angular são inseridos com parâmetros $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$. Os resultados, somente, apresentam o comportamento da dinâmica modelada para estrutura hexarrotor, considerando-se as suposições adotadas e com suas restrições. A adição de entradas externas, como perturbações e fenômenos não modelados podem ser colocados nos parâmetros de atrito aerodinâmico linear e angular. Dos resultados experimentais, a dinâmica elétrica e mecânica dos motores **BLDC** são considerados similares e não há diferença física, seja por construção e de desempenho operacional dos rotores. Resultados experimentais de controle desenvolvido a partir da modelagem matemática serão apresentados no próximo capítulo.

2.4 Sumário

Neste capítulo foi apresentado o desenvolvimento de um modelo matemático que represente um Veículo Aéreo Não Tripulado (**VANT**) hexarrotor. A seção 2.2, introduz os fundamentos das não linearidades de entrada, da dinâmica da pá em voo axial e a máquina *brushless* de corrente contínua para uso na estrutura hexarrotor. O desenvolvimento da modelagem de um **VANT** hexarrotor incluindo as não linearidades de entrada foi apresentado na seção 2.3.

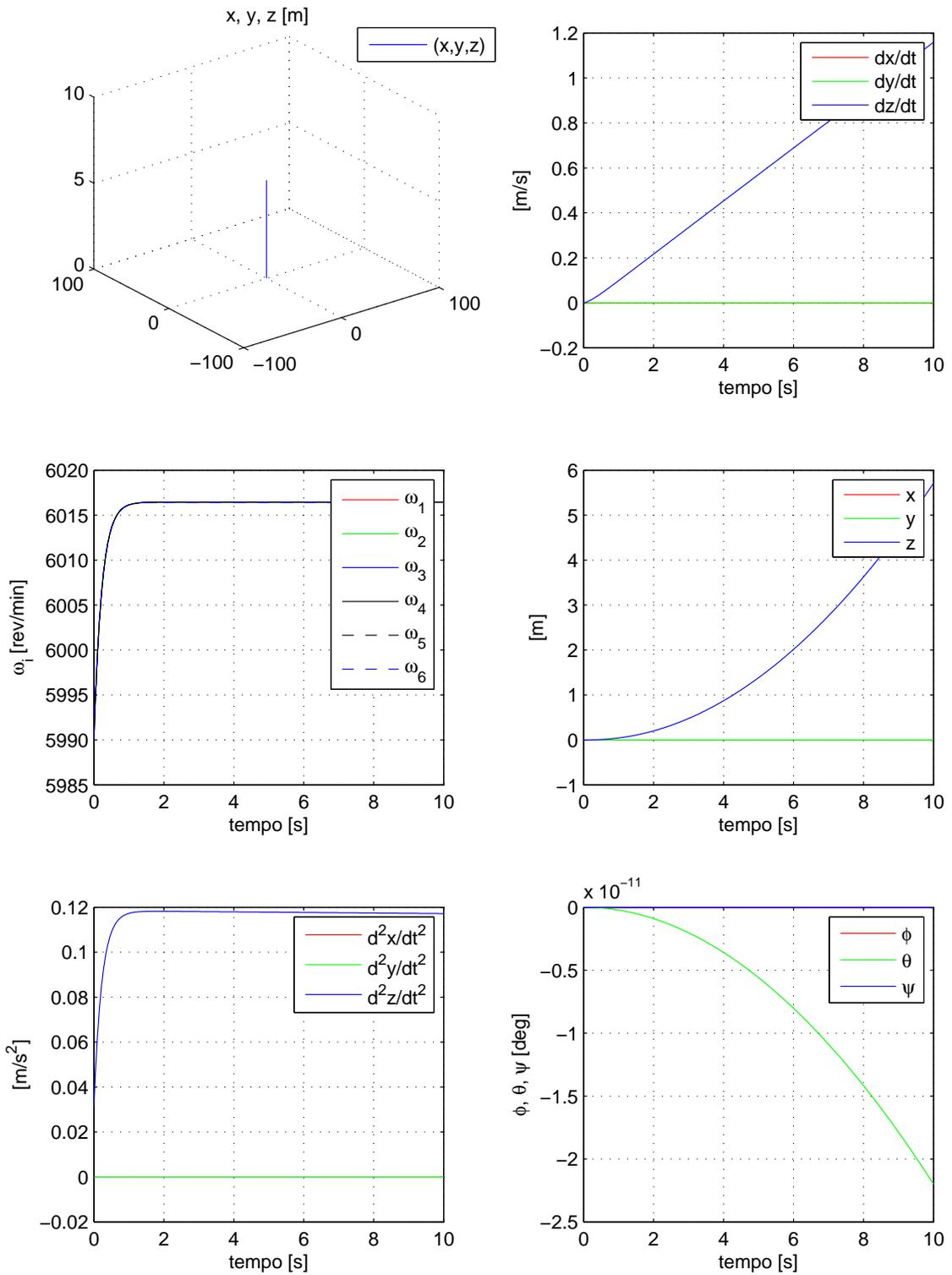


Figura 2.13: Resposta ao degrau unitário do modelo do VANT desenvolvido.

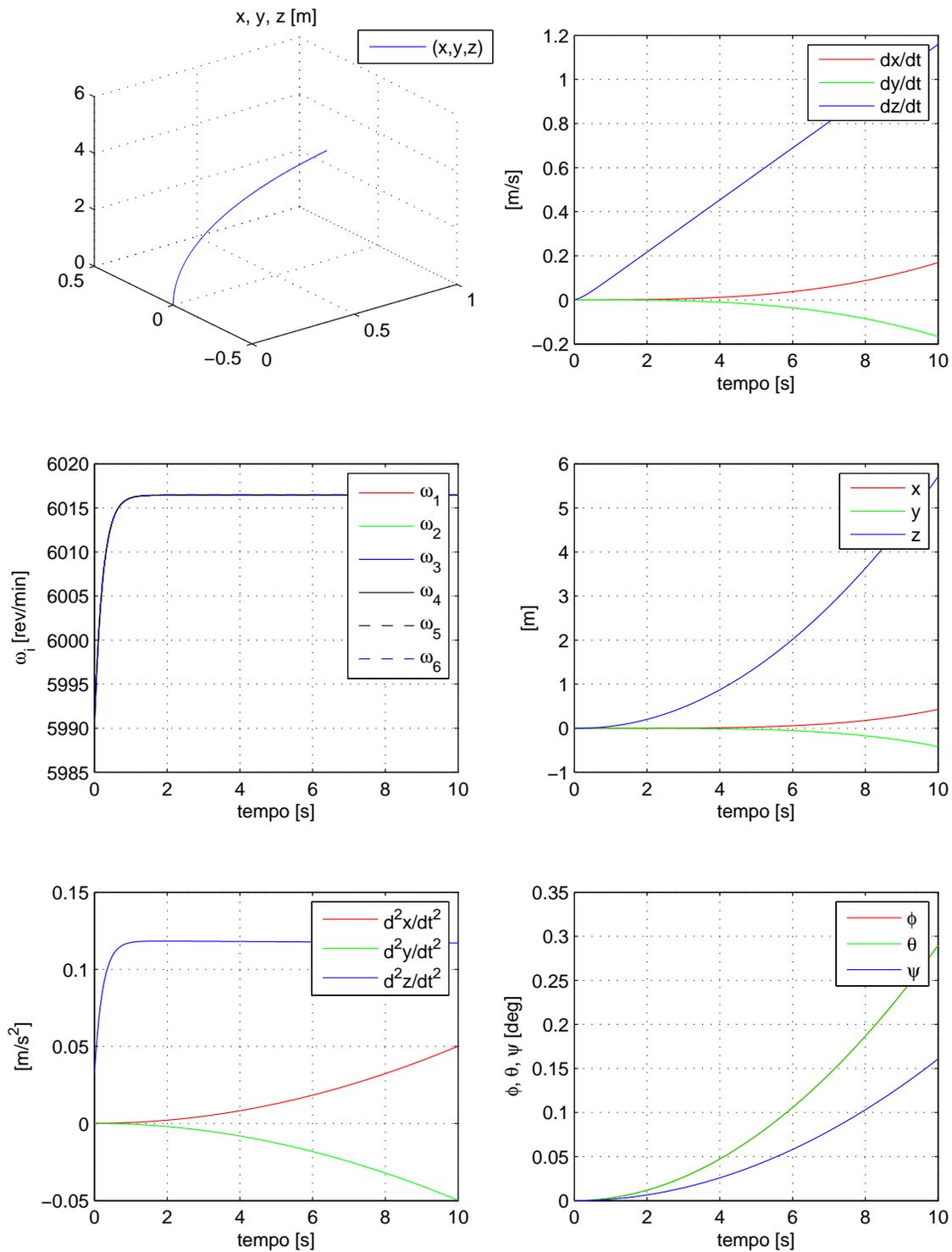


Figura 2.14: Resposta ao degrau unitário, com $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]$ m/s e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]$ rad/s.

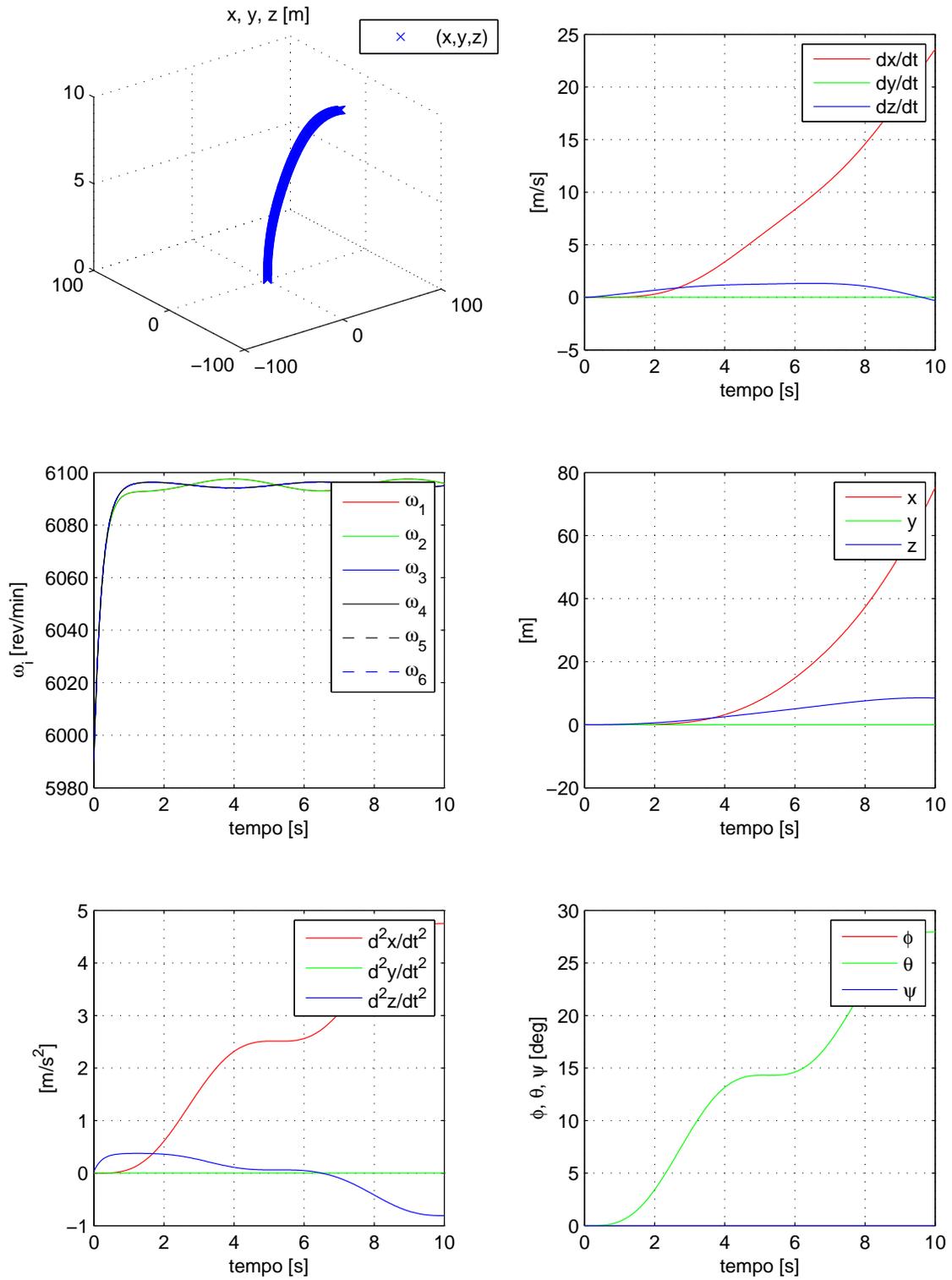


Figura 2.15: Resposta a um movimento sinusoidal no eixo x (pitching θ), com V_{air} e Ω_{air} nulos.

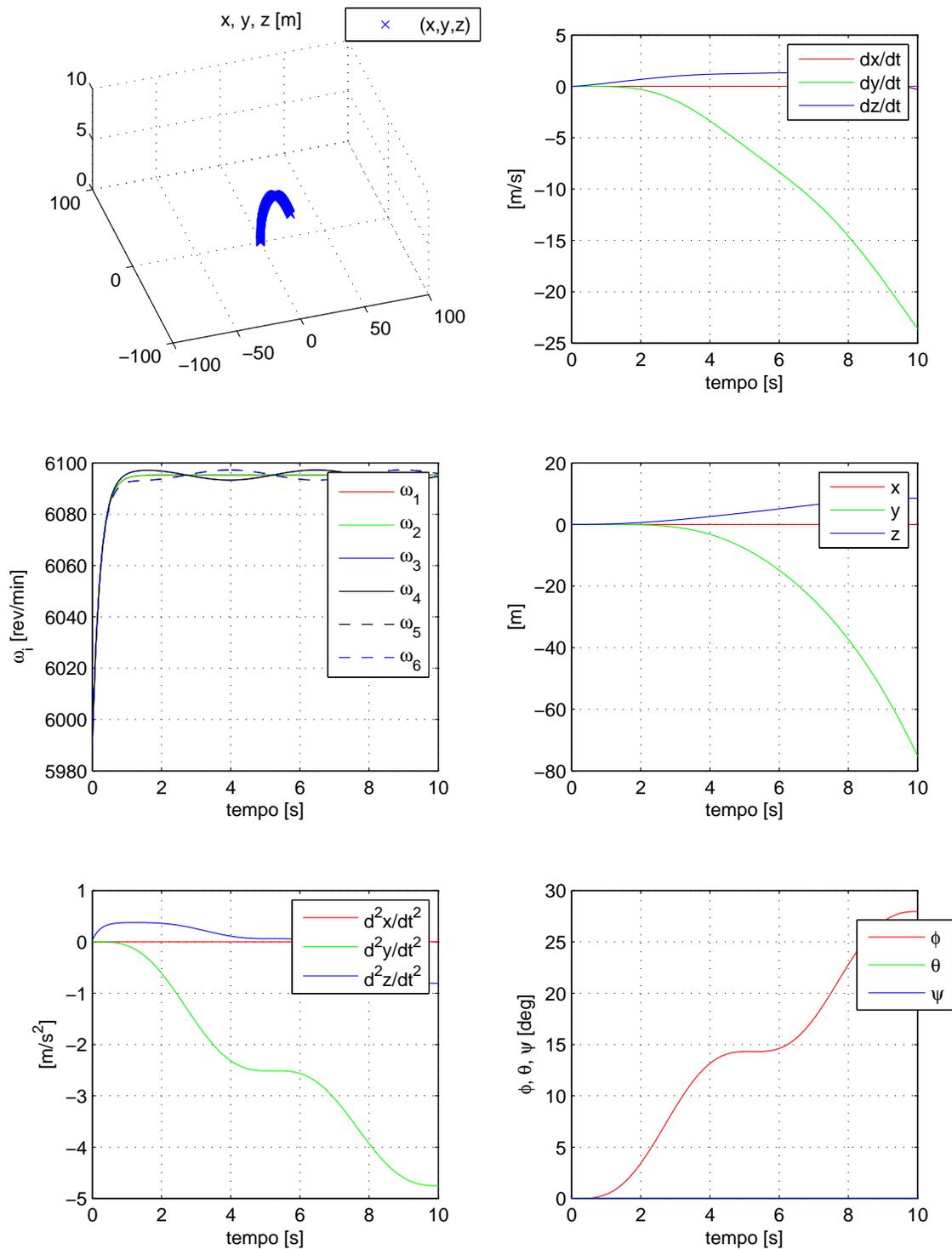


Figura 2.16: Resposta a um movimento sinusoidal no eixo y (rolling ϕ), com V_{air} e Ω_{air} nulos.

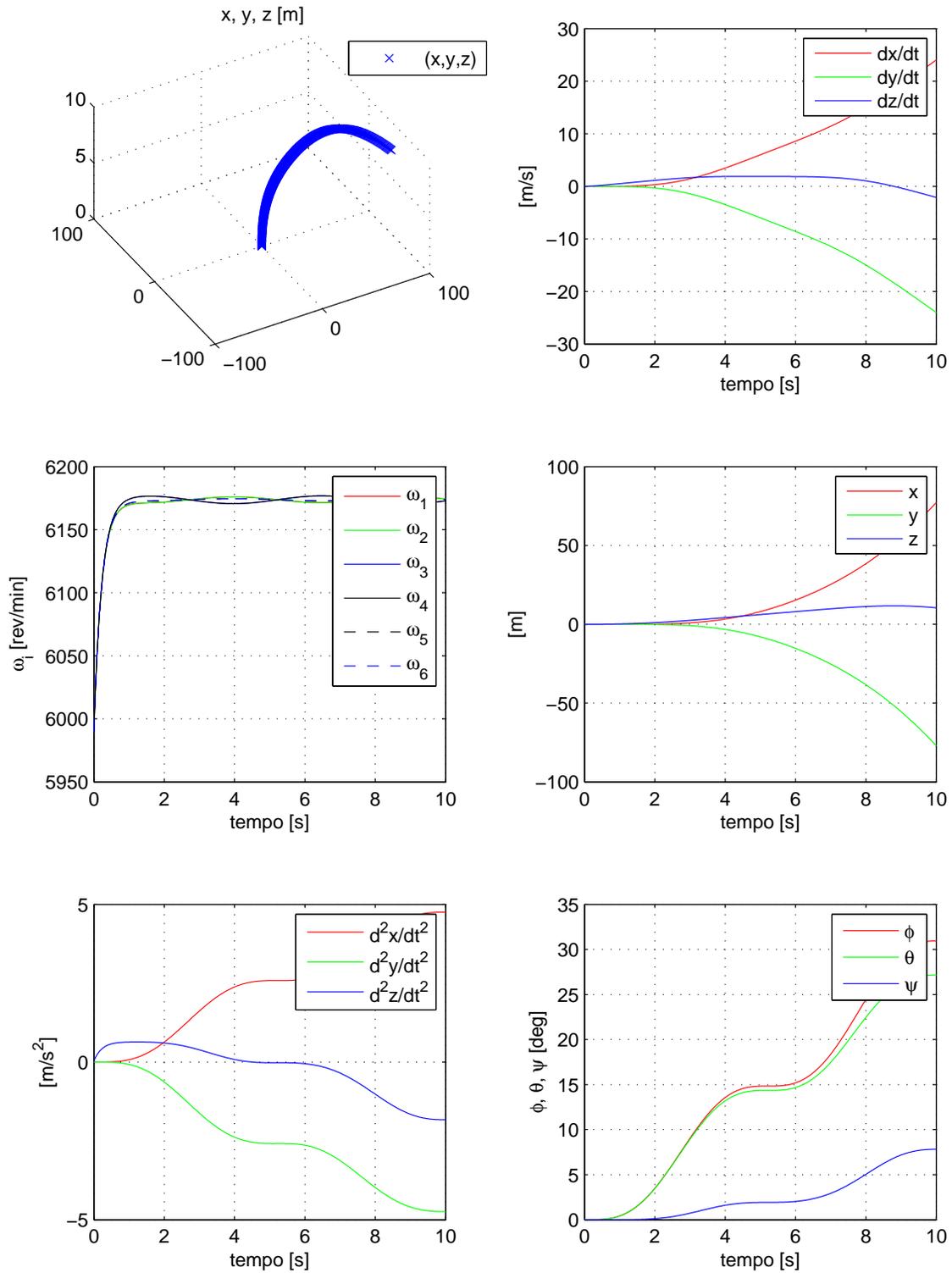


Figura 2.17: Resposta a movimentos nos eixos x e y com $V_{air} = [0.1, 0.1, 0.1]m/s$ e $\Omega_{air} = [0.01, 0.01, 0.01]rad/s$.

Capítulo 3

Estimação de Atitude em Tempo Real para o VANT Hexarrotor

Estimar a posição e a orientação é vital para a localização de qualquer VANT. Isto pode ser executado pela integração de um conjunto de informações como girômetros, acelerômetros e magnetômetros referenciados a um sistema inercial ou aos vetores gravidade e campo magnético terrestre. Para este propósito, o filtro de Kalman com suas variantes como estendido, “unscented” e complementar foram extensamente usadas na literatura (Brown, 2005; Suh, 2006; Neto et al., 2009; Suh et al., 2010). Outras técnicas adotam, além dos sensores de medida inercial, a integração de um conjunto de sensores capazes de fornecer informações úteis como a visão, um sistema de posicionamento global, que baseados nas técnicas de servovisão (imagem ou posição) e fluxo óptico, possibilitaram a localização e a navegação do VANT em ambientes desconhecidos. Sem a medição de informações externas, a estimação de atitude basear-se-ia apenas na integração de dados de medidas inerciais ocasionando erros de integração para a posição. O objetivo deste capítulo é apresentar o desenvolvimento de um estimador de atitude em tempo real usando quatérnios, baseado na filtragem não linear, e aplicado ao VANT hexarrotor. Os resultados obtidos por testes para o protótipo desenvolvido mostram um bom desempenho para a estrutura hexarrotor.

3.1 Introdução

SISTEMAS de sensores combinando diferentes grandezas de medidas como girômetros, acelerômetros, inclinômetros e magnetômetros são, geralmente, utilizados para a determinação de atitude em VANTs (Earl e D’Andrea, 2004; Suh *et al.*, 2010; Hall *et al.*, 2008; Xue *et al.*, 2009; Bae e Kim, 2010). A determinação da orientação usando um girômetro é realizado por integração numérica das velocidades de um corpo rígido em movimento rotacional, enquanto o uso do acelerômetro proporciona a orientação em função do efeito da gravidade terrestre. Girômetros de alta qualidade e com valores iniciais precisos resultam em estimações precisas por longos períodos de atualização. Assim, se o objetivo de uso é em um VANT, então a estimacão de atitude deve ser fiável sobre uma escala de tempo prolongado. Em contraste, os sinais dos acelerômetros não precisam ser integradas numericamente, sempre que, estas forneçam de maneira diretas os valores dos ângulos de inclinação. Porém, as saídas dos acelerômetros são sensíveis a movimentos translacionais e para a estimacão de atitude, geralmente, são usadas durante as fases de baixa aceleração. Para fornecer uma referência absoluta de atitude, inclinômetros e acelerômetros que relacionam o corpo ao vetor de gravidade terrestre podem ser usados. Existe uma vasta literatura sobre as técnicas de estimacão de atitude, dentre deles realçam as avançadas técnicas de filtragem não linear (complementar, unscented e partículas), sendo as que demandam maior custo computacional e as vezes inapropriadas para aplicações em limitados sistemas embarcados (Thrun *et al.*, 2006; Lim e Hong, 2010; Yafei e Jianguo, 2010).

Dois métodos que são comumente empregados para estimacão de atitude são o Filtro de Kalman Estendido (**FKE**) (Thrun *et al.*, 2006) e o observador de estados com ganho constante, frequentemente denominado de filtro complementar devido a suas propriedades de filtragem para sistemas lineares (Euston *et al.*, 2008; Neto *et al.*, 2009). O **FKE** foi usado para uma série de aplicações aeroespaciais e é conhecido por ter um comportamento imprevisível, embora muitas vezes, utilizados com sucesso. A estimacão de atitude usando diferentes conjuntos de sensores têm sido estudados em diversos trabalhos (Choukroun *et al.*, 2006). Alguns desses filtros, no entanto, têm-se revelado complexos em aplicações robustas (Edwan *et al.*, 2011). Na prática, algumas aplicações usam sistemas de filtro complementar com características **SISO**. Earl e D’Andrea (2004) utilizam uma abordagem por decomposicão para desenvolver

um filtro que estime a atitude em tempo real de um helicóptero quadrirrotor. O filtro utiliza medições de um sistema de girômetro de três eixos e um sistema de visão computacional off-board. Em Alarcón *et al.* (2009) apresenta-se uma avaliação experimental de um algoritmo de estimação de atitude baseada em **FKE** e no método de mínimos quadrados, procedimento baseado em fusão de sensores.

Suh *et al.* (2010) propuseram o uso de um filtro avanço/atraso como função suave para o problema de estimação atitude usando sensores de medida inercial e magnetômetros. A função suave de avanço consiste em um método indireto de filtragem de Kalman, modelando sinais dos acelerômetros, girômetros e magnetômetros, e, a função de atraso consiste na dinâmica da atitude em tempo reverso expresso por quatérnios. Neste método de estimação de atitude, a existência do problema de aceleração externa ao corpo não é considerado. Recentes trabalhos, apresentam uma vasta variedade de análise de métodos para estimação de atitude que foram usados em benefício de manobras com **VANTs** de pequeno porte. Com os experimentos realizados, estes foram utilizados para avaliar os efeitos da aceleração axial nos rotores, mudanças de atitude frente às manobras de movimento lateral, longitudinal e os seus efeitos gerados no **IMU** e demais sensores (Ludington *et al.*, 2006; Marina *et al.*, 2012; Perrin *et al.*, 2004).

Nas próximas seções, iremos fornecer uma solução de fusão de sinais para uma unidade de medida inercial com o objetivo de estimar a atitude em tempo real e aplicado a um **VANT** hexarrotor. Os sinais de fusão combinam as seguintes informações: girômetros, acelerômetros e magnetômetros com três eixos ortogonais em cada um, cuja integração em um único módulo é denominada de Unidade de Medida Inercial (*Inertial Measurement Unit*) (**IMU**). A **IMU** é um sensor de baixo custo, pequeno e adequado para sistemas com estruturas de carga útil reduzida. As informações fornecidas pela **IMU** são velocidades angulares, acelerações lineares e a orientação referenciada ao norte magnético terrestre. Este conjunto de informações será usado para estimar a atitude do **VANT** hexarrotor.

3.2 Metodologia

O **VANT** desenvolvido é um helicóptero multirrotor com três rotores coaxiais contrarrotativos, também chamado de hexarrotor, como é representado na figura 3.1(a),

é o vetor de aceleração angular fixo ao corpo. A característica das medidas dos acelerômetros, contém incertezas nos seus parâmetros que podem ser modeladas como ruído branco gaussiano $\vec{\mathbf{a}}_{\text{noise}}$ e com viés variando lentamente $\vec{\mathbf{a}}_{\text{bias}}$, envolvidos no processo devido à falta de ortogonalidade entre os sensores. As acelerações medidas contêm fontes de erro que são definidos como $\vec{\mathbf{a}}_{\text{meas}} = \mathbf{A}_{\text{SFCC}} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{\text{ideal}} + \vec{\mathbf{a}}_{\text{bias}} + \vec{\mathbf{a}}_{\text{noise}}$, onde \mathbf{A}_{SFCC} é uma matriz diagonal de ordem três, correspondente aos fatores de escala.

Se considerarmos o uso de um sensor com três eixos para medir o vetor, se observará nas medições o efeito da aceleração da gravidade terrestre. Em geral, este efeito é subtraído do resultado final, a fim de simplificar o uso dos dados da **IMU**. Os acelerômetros não medem estas grandezas de maneira direta, mas sim a força específica \mathbf{f}^b , que relacionadas às acelerações lineares $\vec{\mathbf{a}}_{\text{ideal}}^e$ e ao campo gravitacional da terra contribuam para a mesma. A equação (3.1) representa os valores das grandezas medidas pelo sensor. Neste arranjo, é possível representar o vetor de aceleração de gravidade como $\vec{\mathbf{g}}^e = [0, 0, g_0]^T$, sendo g_0 uma constante relacionada ao sistema referencial terrestre, cujo valor é aproximadamente 9.78m/s^2 .

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{IMU}} = \mathbf{f}^b = \mathbf{R}^{be}(\phi, \theta, \psi)(\vec{\mathbf{a}}_{\text{ideal}}^e - \vec{\mathbf{g}}^e) + \vec{\mathbf{a}}_{\text{bias}}^b + \vec{\mathbf{a}}_{\text{noise}}^b \quad (3.1)$$

O vetor de gravidade $\vec{\mathbf{g}}^e$, também pode ser descrito em relação a referência inercial da **IMU** usando a matriz de transformação \mathbf{R}^{be} que relaciona as duas referências: o sistema do corpo do veículo e o inercial. No entanto, a fim de aplicar a matriz de transformação, é preciso conhecer os ângulos de orientação dos sensores no espaço. Nesse sentido, uma simplificação matemática pode ser adotada, considerando que a **IMU** está montada exatamente no centro de gravidade do hexarrotor, que no caso real, isso pode não ser necessariamente verdade. Porém, o lugar escolhido pode mostrar uma relativa diferença entre a atual localização e o centro de gravidade de forma desprezível. Assim, assume-se que o sistema de referência do hexarrotor, b , como é mostrada na figura 3.1(b) e o sistema de referência da **IMU** são coincidentes. Também ignoraram-se todos os tipos de ruídos que corrompem os sinais medidos para esta fase. Tomando essas considerações, permite-se simplificar a equação prévia (3.1) por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\text{IMU}} = -\mathbf{R}^{be}(\phi, \theta, \psi)(\vec{\mathbf{g}}^e). \quad (3.2)$$

Reescrevendo as equações para os ângulos como funções de projeção do vetor $\vec{\mathbf{a}}_{\text{IMU}}$ em cada eixo da **IMU**, as possíveis estimativas para ϕ e θ usando as medidas dos

acelerômetros podem ser vistos nas seguintes equações:

$$\theta_a = \arcsin\left(\frac{a_x}{\|\vec{a}\|}\right), \quad (3.3)$$

$$\phi_a = \arcsin\left(\frac{a_y}{-\|\vec{a}\| \cos \theta_a}\right), \quad (3.4)$$

onde a_x e a_y são os valores medidos da **IMU** para os componentes do vetor de aceleração ao longo dos eixos x e y .

As suposições são formalizadas como segue:

Suposição 3.1. *Os sensores usados para a estimação de atitude estão perfeitamente montados e são ortogonais aos seus eixos. Por conseguinte, as medições não apresentam viés por desalinhamento, ou se existirem, estes são desprezíveis. Além disso, o ruído de medição é branco gaussiano aditivo de média nula.*

Considerando o pressuposto, a equação (3.4) apresenta problema de singularidade para o ângulo $\theta_a = \pm\pi/2\text{rad}$. No entanto, em condições normais de funcionamento, o ângulo de arfagem é restrito a valores menores que $\pi/2\text{rad}$. As mesmas considerações são válidas, para o ângulo de rolagem.

Suposição 3.2. *Os acelerômetros medem apenas o vetor de gravidade, isto é somente válido quando o hexarrotor está pairando.*

Embora restritivo, o pressuposto é válido para uma gama de movimentos realizados. Por tanto, os sinais de baixa frequência dos acelerômetros fornecem maior confiabilidade para as estimativas de ϕ e θ . No caso em que o hexarrotor está pairando, o módulo do vetor de aceleração $\|\vec{a}\|$ é igual a aceleração da gravidade g_0 . Será mostrada em sequência, que a fusão desta informação com os dados dos giroscópios e magnetômetros, montados no hexarrotor resultará em uma melhor estimativa de atitude.

3.2.2 Estimação de Atitude Baseada em Medidas de Magnetômetros

O campo magnético terrestre assemelha-se a um dipolo magnético com seus polos próximos aos polos geográficos da terra. As linhas de campo percorrem os polos

sul e norte magnéticos, mais o menos paralelo à superfície, com uma inclinação de aproximadamente $11,3^\circ$ relativa ao eixo de rotação da terra. O sensor capaz de medir a orientação em relação aos polos magnéticos terrestres é o magnetômetro, geralmente embutido em uma bússola digital. Os processos experimentais que serão apresentados, mostrarão os resultados com base a dois magnetômetros ortogonais montados e calibrados para medir a orientação do campo magnético terrestre. Como realizado para os acelerômetros, pode-se representar os sinais medidos pela bússola digital em um vetor $\vec{\mathbf{m}}$ composto da soma da orientação do norte magnético terrestre $\vec{\mathbf{N}}$ transformada pela matriz de rotação \mathbf{R}^{be} com relação ao ângulo de guinada (ψ), e o vetor de ruído branco gaussiano de média nula $\vec{\mathbf{m}}_{\text{noise}}$, escrito como:

$$\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{m}}_{\text{IMU}} = \mathbf{R}^{be}(\psi)\vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{m}}_{\text{noise}} \quad (3.5)$$

Mais uma vez, as suposições são formalizadas a fim de simplificar o problema de estimação de atitude.

Suposição 3.3. *Da mesma forma que para os acelerômetros, as incertezas envolvidas no processo são desprezíveis.*

Suposição 3.4. *Supõe-se que o plano representado pelos dois eixos dos magnetômetros ortogonais estão sempre paralelos à superfície terrestre.*

Sendo assim, a equação que calcula o ângulo de guinada, ψ_m , como uma função das medidas dos magnetômetros m_x e m_y na bússola digital e relativo ao sistema referencial **NED**, pode ser escrito de forma a complementar a atitude como:

$$\psi_m = \arctan\left(\frac{m_y}{m_x}\right). \quad (3.6)$$

3.2.3 Estimação de Atitude Baseada em Medidas de Girômetros

A **IMU**, além dos acelerômetros e magnetômetros, contém três girômetros ortogonais que medem as variações angulares ou movimentos angulares sobre os eixos do corpo do hexarrotor. As medidas obtidas relacionam-se com a aceleração de coriolis, provocada por uma massa interna no sensor microeletromecânico como resultado da rotação do dispositivo. O sistema opera sobre a superfície terrestre, assim, as

medidas obtidas por girômetros e acelerômetros são afetados pela rotação da terra, $\omega_{earth} \approx 15^\circ/\text{hora}$. Neste trabalho, no entanto, como o tempo de operação e os efeitos causados pela rotação da terra são modestos quando comparados aos ruídos dos sensores, esses efeitos são desprezados. Assim, as estimativas podem ser obtidas através da integração da equação diferencial cinemática, $\vec{\omega}_{meas} = \mathbf{\Omega}_{SFCC} \cdot \vec{\omega}_{ideal} + \vec{\omega}_{bias} + \vec{\omega}_{noise}$ que descreve o sistema, onde $\mathbf{\Omega}_{SFCC}$ é uma matriz diagonal de ordem três, correspondente aos fatores de escala dos girômetros, $\vec{\omega}_{bias}$ são os vieses e $\vec{\omega}_{noise}$ o vetor de ruído branco gaussiano com média nula.

Como foi visto previamente, um dos problemas que enfrenta a estimação de atitude usando a representação por ângulos de Euler é a singularidade na matriz em algumas configurações. Isto pode ser prejudicial para o processo de integração de sinais por fusão, uma vez que produz descontinuidades no resultado final. Por isso, optou-se por utilizar a representação por quatérnios para a fusão de sinais dos sensores. A representação por quatérnios para os dados dos girômetros é dada por:

$$\dot{\vec{q}}^{be} = \frac{1}{2} \vec{q}^{be} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{eb,ideal}^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{W}_{ideal} \vec{q}^{be} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \vec{q}^{be} \quad (3.7)$$

onde \odot define o operador produto de quatérnios e $\vec{\omega}_{IMU}$ o vetor das medidas obtidas pelos girômetros contendo as variações angulares $\vec{\omega}_{eb,ideal}^b$ do corpo em relação à referência inercial ($_{eb}$) expresso no sistema de coordenadas do corpo (b). Os valores do vetor de quatérnios, por sua vez, são obtidos pela integração numérica da equação (3.7), onde ω_x , ω_y e ω_z são as variações angulares ideais correspondentes aos ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

3.2.4 Fusão de Dados da Atitude

O método de fusão, baseado em filtro de Kalman é um método matemático criado por R. E. Kalman em 1960, com o propósito de usar medições de grandezas realizadas ao longo do tempo e gerar resultados que tendam a se aproximar dos valores verdadeiros das grandezas medidas e valores associados. O método tem sido essencial para o desenvolvimento de tecnologias espaciais integrando sistemas de navegação. O Filtro de Kalman Estendido (**FKE**) é uma variante do filtro de Kalman e eficiente para sistemas não lineares (Thrun *et al.*, 2006), tornando-o adequado para

a estimação de atitude de um **VANT** hexarrotor, com equações modeladas usualmente com comportamento não linear. Esta subseção trata do desenvolvimento de um algoritmo de **FKE**, para fusão das medidas das grandezas obtidas pelos sensores e cálculo das estimativas de atitude. O objetivo na fusão é realizar de maneira recursiva a estimativa em tempo real dos estados do sistema usando a equação em espaço de estados, que representa o modelo dinâmico expresso em quatérnios,

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota a equação de estado não linear, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ denota as grandezas medidas de um conjunto de sensores, \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k denotam os ruídos do processo e os ruídos das medidas, respectivamente. As equações do modelo do processo, que descrevem a evolução dos estados (atitude) ao longo do tempo são denotadas por $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$. Além disso, o sistema de medição é dado por $h : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, que descreve como as medidas da **IMU** relacionam-se com o estado do processo. O objetivo é fundir o conjunto de informações medidas junto à equação de estados.

As equações de estado do processo, para a etapa de predição, são descritas por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{cases} \vec{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{be}} &= \vec{\mathbf{q}}_k^{\text{be}} + \frac{\Delta T}{2} \mathbf{W}_{\text{ideal},k} \vec{\mathbf{q}}_k^{\text{be}} \\ \vec{\omega}_{\text{eb},k+1}^{\text{b}} &= \vec{\omega}_{\text{IMU},k}^{\text{b}} - \vec{\omega}_{\text{bias},k}^{\text{b}} - \vec{\omega}_{\text{noise}}^{\text{b}} \\ \vec{\omega}_{\text{bias},k+1}^{\text{b}} &= \vec{\omega}_{\text{bias},k}^{\text{b}} + \vec{\eta}_{\text{bias}}^{\text{b}} \end{cases} \quad (3.10)$$

e a equação das medidas, para a etapa de atualização, podem ser descritas por:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \vec{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{be}} \quad (3.11)$$

Apesar do girômetro possuir uma autocorreção do sinal para os efeitos de temperatura, algumas flutuações de baixa frequência $\vec{\omega}_{\text{bias},k}^{\text{b}}$ permanecem, em parte, devido à dependência da aceleração não modelada. O erro remanescente $\vec{\omega}_{\text{noise}}^{\text{b}}$ é considerado ruído branco gaussiano com média nula. Além disso, as medidas obtidas não são precisas o suficiente para sentir a rotação da terra. Isto implica que o sistema de coordenadas pode ser considerado sendo um referencial inercial. Na equação (3.10), todas as quantidades são vetores tridimensionais, exceto para a orientação que é

descrita por um vetor unitário tetradimensional \vec{q}^{be} , resultando em um vetor de estados com dez elementos e ΔT   o período de amostragem.

A razo do uso dos quatérnios   que estes oferecem uma parametrizao no singular, uma equao diferencial bilinear que pode ser integrada analiticamente tendo somente quatro parâmetros. Em contraste, os ângulos de Euler têm apenas três parâmetros, mas cont m singularidades e o conjunto de elementos so no lineares. Além disso, a matriz de transformao tem pelo menos seis parâmetros.

O vetor de estado, na etapa de atualizao, implica que o modelo de medio é dado pelos acelerômetros e magnetômetros, expressos pelas equaes (3.3), (3.4) e (3.6). Por fim, a representao do vetor de quatérnios pelos ângulos de Euler é dada por:

$$\vec{q}_{am,k+1}^{be} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_a/2) \cos(\theta_a/2) \cos(\psi_m/2) + \sin(\phi_a/2) \sin(\theta_a/2) \sin(\psi_m/2) \\ \sin(\phi_a/2) \cos(\theta_a/2) \cos(\psi_m/2) - \cos(\phi_a/2) \sin(\theta_a/2) \sin(\psi_m/2) \\ \cos(\phi_a/2) \sin(\theta_a/2) \cos(\psi_m/2) + \sin(\phi_a/2) \cos(\theta_a/2) \sin(\psi_m/2) \\ \cos(\phi_a/2) \cos(\theta_a/2) \sin(\psi_m/2) - \sin(\phi_a/2) \sin(\theta_a/2) \cos(\psi_m/2) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

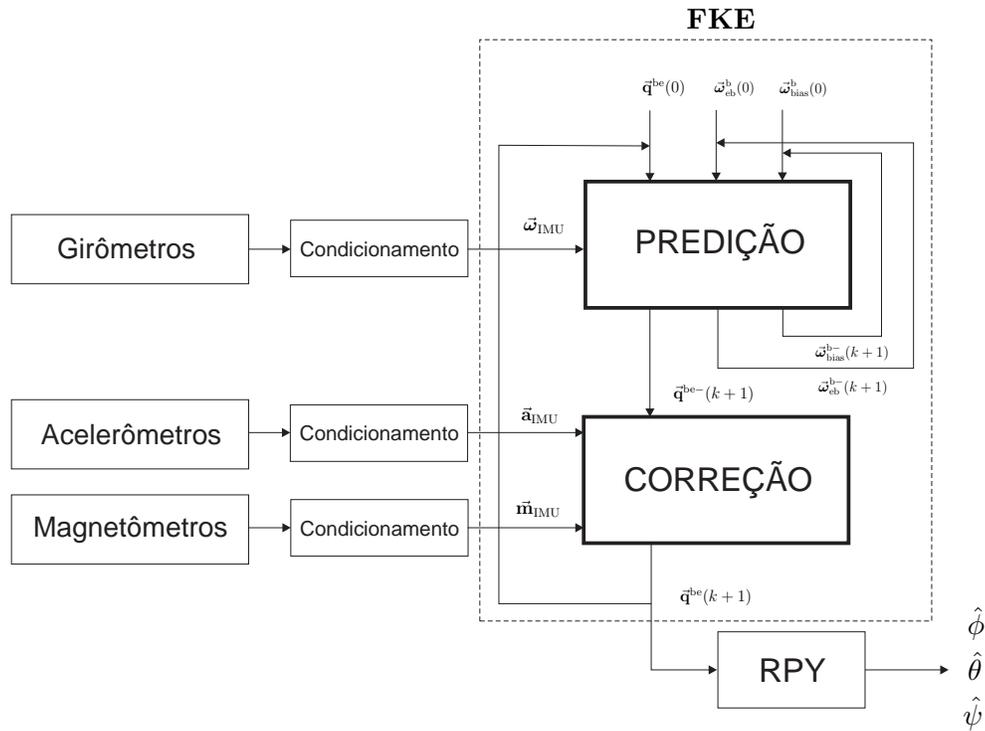
O modelo do processo em um **FKE** fornece o cálculo da etapa de predico dos estados da atitude do hexarrotor com base nas medidas dos girômetros e o modelo com base nas informaes dos acelerômetros e magnetômetros, calcula a etapa de atualizao ou correo dos estados da atitude expressos no vetor de quatérnios. Isso proporciona um melhor desempenho para os girômetros evitando erros por processos *dead reckoning*. O processo final é obter os ângulos que compõem a atitude a partir da converso dos quatérnios em ângulos de Euler. Estas podem ser representados da seguinte forma:

$$\hat{\phi} = \arctan \left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right); \quad (3.13)$$

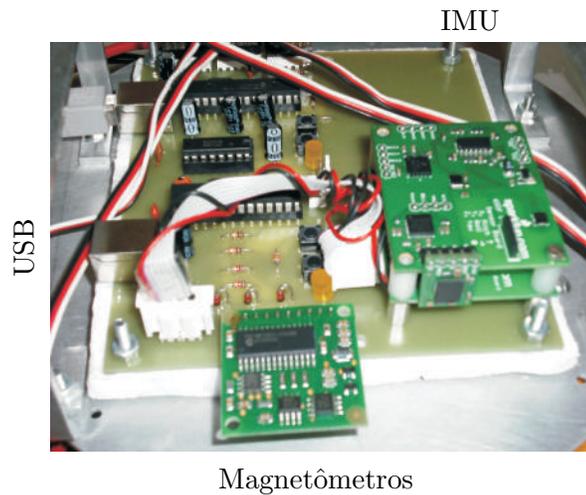
$$\hat{\theta} = -\arcsin(2(q_1q_3 - q_0q_2)); \quad (3.14)$$

$$\hat{\psi} = \arctan \left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right). \quad (3.15)$$

Um diagrama em blocos sintetiza o procedimento de estimaco de atitude usando o **FKE**, na figura 3.2(a) e o circuito experimental de baixo custo para validar o algoritmo desenvolvido, na figura 3.2(b).



(a) Diagrama em blocos do estimador de atitude baseado em **FKE**.



(b) Sistema embarcado.

Figura 3.2: Diagrama em blocos para o estimador de atitude e o circuito experimental implementado de baixo custo usado no **VANT** hexarrotor.

3.3 Resultados Experimentais

Nesta seção descreve-se o funcionamento da arquitetura hardware e software concebida de acordo com o paradigma mestre-escravo para a estimação de atitude do

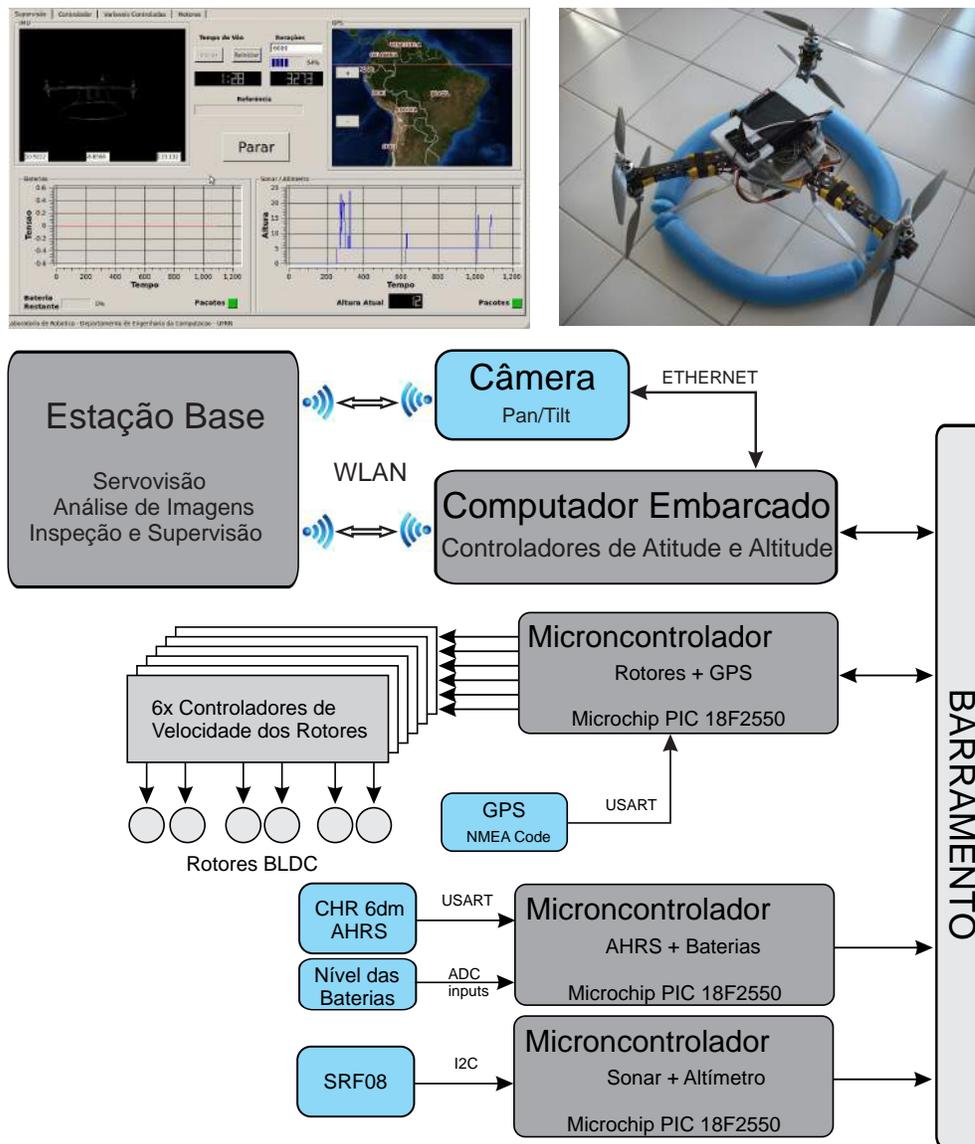


Figura 3.3: Arquitetura hardware do sistema embarcado usado no VANT hexarrotor.

VANT hexarrotor. Como ilustrado na figura 3.3, a arquitetura usa um computador embarcado que, através de um barramento, torna possível a comunicação e a troca das informações entre os microcontroladores, dispostos para determinadas aplicações. Os microcontroladores, dispostos para os sensores são usados como interface e os dados são enviados pelo barramento ao computador embarcado. No computador usa-se o sistema operacional Linux padrão, as bibliotecas do C++ para o condiciona-

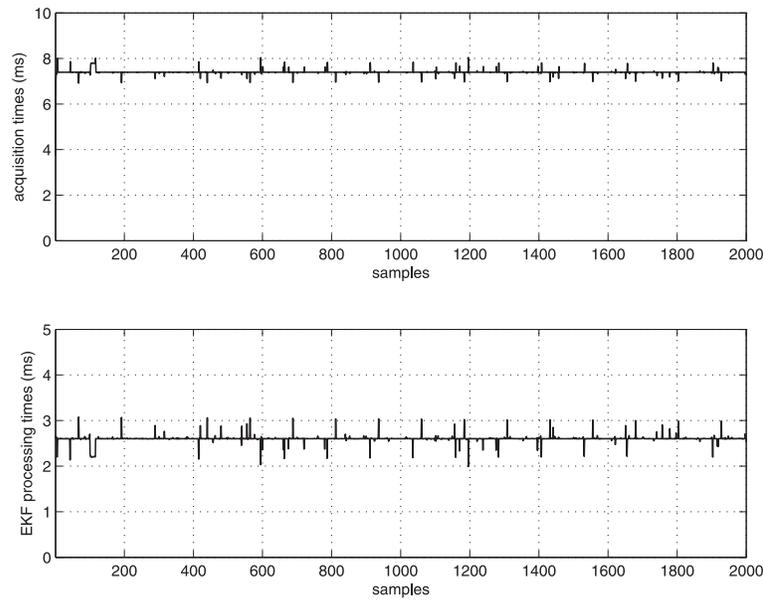


Figura 3.4: Tempo de aquisição e taxa de atualização do sensor pelo barramento microcontrolador/computador e o tempo de execução do **FKE** para estimação de atitude.

mento, ajuste e normalização dos dados sensoriais; o acionamento dos atuadores; o desenvolvimento e execução dos algoritmos do estimador de atitude por **FKE**; e o desenvolvimento do controlador robusto não linear para o **VANT** hexarrotor, todos executados em tempo real através do Barramento Serial Universal (*Universal Serial Bus*) (**USB**). O conjunto de sensores da atitude utilizados integram uma Unidade de Medida Inercial (*Inertial Measurement Unit*) (**IMU**) desenvolvida pela Sparkfun Electronics, com até seis Graus de Liberdade (*Degrees-of-Freedom*) (**DOF**) versão 4.0, implementado para o experimento, como é ilustrado na figura 3.2(b). A **IMU** está constituída por um microcontrolador LPC2138 ARM7 que realiza a conversão e aquisição de dados adquiridos pelos seguintes **CI**s: MMA7260Q, acelerômetro de três eixos da Freescale; IDG300, girômetro de três eixos com até ± 300 graus/segundo da InvenSense; e HMC1052L, magnetômetro de três eixos da Honeywell. Assim, o conjunto fornece as medições das acelerações, as variações angulares e o vetor de campo magnético terrestre nos seus correspondentes eixos ortogonais, respectivamente.

A figura 3.4, ilustra o tempo de resposta para aquisição pelo barramento conjuntamente com a taxa de atualização do dado pelo sensor e o tempo que leva em executar o algoritmo de estimação de atitude. A partir da coleta de 2000 amostras

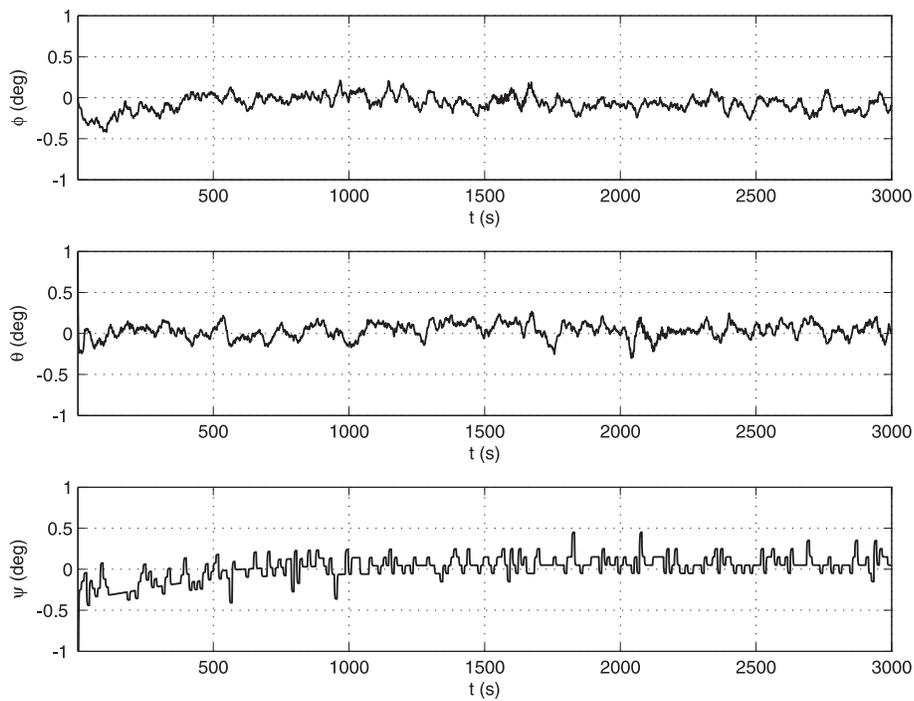
no experimento, obteve-se a média de 7.3966ms e 2.5991ms, respectivamente, sendo 9.9957ms o tempo total necessário para executar uma amostra. Um valor da amostra depende da constante de tempo de leitura do sensor (taxa de atualização), que em geral é mais lenta do que a transferência do dado pelo barramento microncontrolador/computador embarcado. Note-se nos gráficos, alguns picos com amplitude diferentes, os quais são, provavelmente, retransmissões consideradas razoáveis para taxa de atualização e o estimador.

A figura 3.5(a), ilustra o resultado de uma estimação de atitude quando o hexarrotor está em regime estacionário (pairado). Nota-se que não há erro acumulativo por integração ou desvios em relação ao eixo horizontal. A figura 3.5(b) mostra movimentos independentes para os eixos angulares ϕ , θ e ψ expresso em escalas de graus respectivamente.

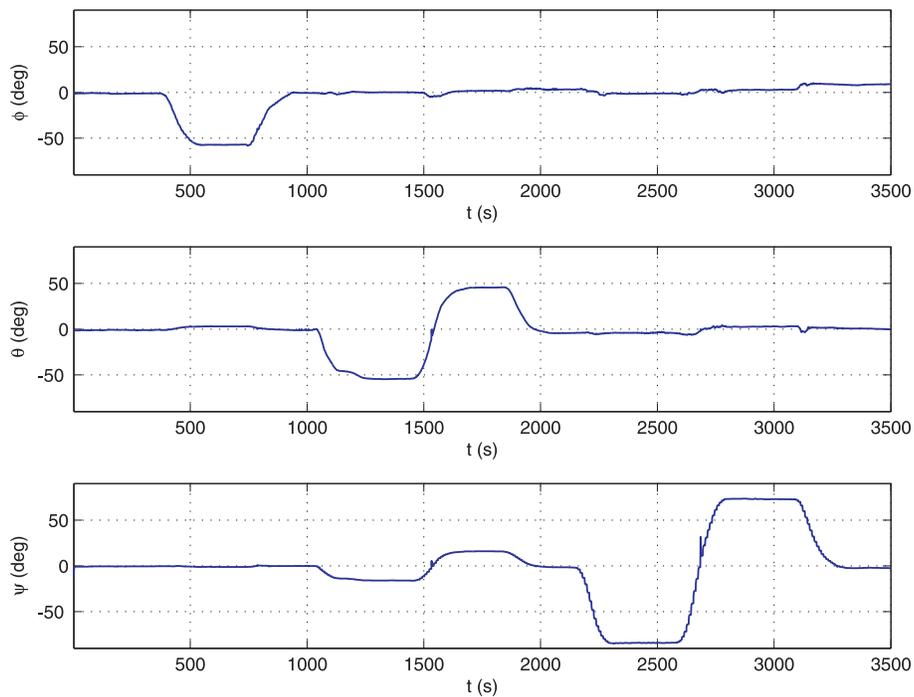
A figura 3.6 mostra um resultado completo da estimativa de atitude usando o **FKE** em tempo real. São vistas as leituras de informações dos diferentes sensores, o comportamento do filtro desenvolvido, a evolução do vetor de quatérnios e verifica-se que o módulo atinge ao valor unitário. Além disso, pode-se observar a evolução dos vieses para compensar seu próprio efeito e os erros gerados correspondentes às etapas de predição e atualização. Finalmente os ângulos estimados correspondentes ao vetor de atitude expressos em escalas de graus são mostrados.

3.4 Sumário

Neste capítulo foi apresentado um estimador de atitude baseado no **FKE** utilizando representação da orientação baseada em quatérnios. Uma arquitetura hardware/software foi construída para executar o algoritmo de estimação com o objetivo de controle e estabilização de atitude do **VANT** hexarrotor. Trabalhos futuros serão ainda feitos com a integração de um conjunto **GPS/IMU**/visão computacional para determinar a posição e orientação do veículo, possibilitando o rastreamento e a navegação. O capítulo foi organizado da seguinte forma: a seção 3.2 apresentou a metodologia de estimação de atitude usando um sensor de medida inercial e os resultados experimentais, incluindo a sua análise e discussão na seção 3.3.



(a) Rolagem (ϕ), Arfagem (θ) e Guinada (ψ) estimados em regime estacionário (parado).



(b) Movimentos angulares independentes para rolagem, arfagem e guinada estimados por **FKE**.

Figura 3.5: Estimação dos ângulos de atitude por **FKE**.

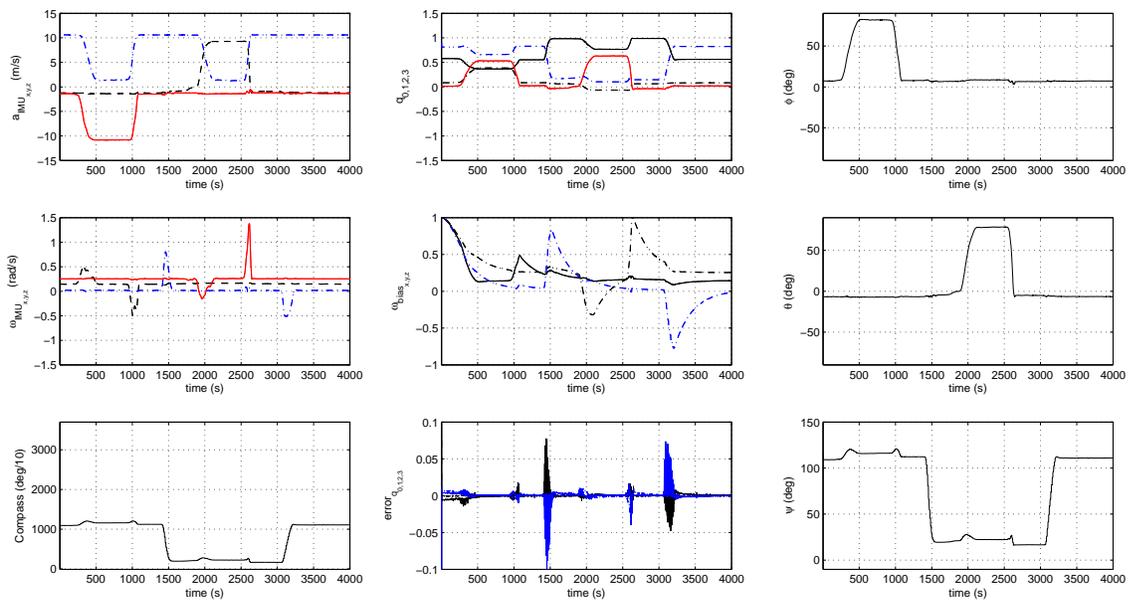


Figura 3.6: Resultados da estimação de atitude visualizando as entradas, o processo de filtragem com os quatérnios e os ângulos obtidos.

Capítulo 4

Controle Robusto por Backstepping para Um VANT Hexarrotor

Neste capítulo, o desenvolvimento de um controlador robusto por backstepping e aplicado em um VANT hexarrotor é apresentado. Para a avaliação experimental do controlador, o hexarrotor experimental está equipado por um sistema embarcado constituído pelos seguintes elementos: um computador embarcado; um hardware/software de estimação usando uma IMU/Sonar, que apropriadamente instrumentado, proporciona as estimativas de altitude e atitude. Para o desenvolvimento do controlador, os sinais proporcionados pelo estimador foram modelados como o valor verdadeiro com a adição de um viés e um ruído branco desconhecidos. Os controladores de atitude/altitude derivaram-se pelo critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas Globalmente Uniformemente Assintoticamente Estável (Globally Uniformly Asymptotically Stable) (GUAS), condições expressas para aplicações práticas formuladas como GUPAS, que lidam com a convergência e a estabilidade assintótica dentro de uma região no espaço de fase, de raio não nulo e de característica limitada. Os ganhos computados para a estabilidade robusta, garantem os limites desejados sobre a atitude e o erro de rastreamento limitado na presença de distúrbios nas medições. As leis de controle foram testadas em simulação numérica e no VANT hexarrotor.

4.1 Introdução

POR Lyapunov é um critério que usa uma função de energia para determinar a convergência assintótica em um sistema de controle, técnica amplamente usada para sistemas não lineares. Porém a escolha de uma função candidata a Lyapunov, para um sistema de controle não linear, não é uma tarefa trivial dependendo muitas vezes da intuição e experiência do projetista. O desenvolvimento de ferramentas matemáticas para o projeto de controle de sistemas não lineares baseado na análise de Lyapunov, como o *backstepping* e o *forwarding* resultam em soluções úteis, aceitos pela comunidade científica, para este tipo de sistemas (Zhou e Wen, 2008).

Backstepping é um esquema recursivo com base no critério de estabilidade de *Lyapunov*, proposto na década dos 1990s, para uma classe estrita de sistemas re-alimentados. Esta técnica é amplamente abordada por Krstić, Kanellakopoulos e Kokotović (Krstić *et al.*, 1995). Com este método a construção das leis de controle, pelas funções candidatas a Lyapunov é sistemático, seguindo um algoritmo passo a passo. O método pode evitar cancelamentos de não linearidades úteis e introduz termos não lineares para melhorar o desempenho transitório, alcançar a regulação e as propriedades de rastreamento (Zhou e Wen, 2008). Estes fatos tornaram a técnica por backstepping útil em sistemas de controle de voo. No entanto, as expressões analíticas derivadas de variáveis pseudo controláveis, especialmente para sistemas de elevada ordem são usualmente desconhecidas ou incertas, limitando a técnica em aplicações práticas (Chaillet e Loría, 2008).

Neste capítulo, a técnica por backstepping é apresentada com o objetivo de projetar leis para um sistema de controle robusto a ruídos de medidas sensoriais fornecidas pelos estimadores de atitude e altitude. As leis de controle estabilizam a atitude e a altitude do sistema VANT hexarrotor proposto.

4.2 Definições de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade é uma exigência principal para todo sistema de controle. O matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), provou teoremas que fornecem condições suficientes para garantir a estabilidade, conceitos amplamente usados em teoria de controle para sistemas lineares e não lineares. O critério ficou

conhecido como *método direto* ou *segundo método de Lyapunov*. O método surgiu com a tentativa de estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio singulares sem qualquer conhecimento de forma explícita da solução, usando funções apropriadas que são definidas no espaço da fase.

Considere o sistema variante no tempo.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua por partes em t e localmente Lipschitz em \mathbf{x} . A solução de (4.1), que começa a partir do ponto \mathbf{x}_0 no tempo $t_0 \geq 0$ é denotada $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$. Os conceitos de estabilidade de Lyapunov descrevem propriedades de continuidade de $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ em relação a \mathbf{x}_0 . Se a condição inicial \mathbf{x}_0 é perturbada para $\tilde{\mathbf{x}}_0$, então, para a estabilidade, a solução perturbada resulta em $\mathbf{x}(t; \tilde{\mathbf{x}}_0, t_0)$ e é necessário que esteja próxima de $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ para todo $t \geq t_0$. Além disso, para a estabilidade assintótica, o erro $\mathbf{x}(t; \tilde{\mathbf{x}}_0, t_0) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ deve tender a zero quando $t \rightarrow \infty$. Assim, a solução $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ de (4.1) é:

- **Limitada**, se existe uma constante $\mathbf{B}(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$ tal que

$$|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)| < \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, t_0), \forall t \geq t_0; \quad (4.2)$$

- **Estável**, se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t; \tilde{\mathbf{x}}_0, t_0) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0; \quad (4.3)$$

- **Atrativa**, se existe um $\mathbf{r}(t_0) > 0$ e, para cada $\varepsilon > 0$, um $\mathbf{T}(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| < \mathbf{r} \Rightarrow |\mathbf{x}(t; \tilde{\mathbf{x}}_0, t_0) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + \mathbf{T}; \quad (4.4)$$

- **Assintoticamente estável**, se for estável e atrativa; e
- **Instável**, se não for estável.

As propriedades de estabilidade de $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ em geral, dependem da condição inicial em t_0 . Para diferentes t_0 , diferentes valores de $\mathbf{B}(\mathbf{x}_0, t_0)$, $\delta(\varepsilon, t_0)$, $\mathbf{r}(t_0)$, e $\mathbf{T}(\varepsilon, t_0)$ podem ser necessárias para satisfazer (4.2), (4.3) e (4.4). Quando essas constantes são independentes de t_0 , as correspondentes propriedades são *uniformes*.

Para sistemas adaptativos, *estabilidade uniforme* é mais desejável do que apenas a estabilidade. Ainda mais desejável é a *estabilidade assintótica uniforme*¹. A solução $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ é **UAS** se é *uniformemente estável e uniformemente atrativa*, isto é, se $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}$, e $\mathbf{T}(\varepsilon, t_0) = \mathbf{T}(\varepsilon)$ não dependem de t_0 . Algumas soluções de um dado sistema podem ser estáveis e outras instáveis. Em particular, (4.1) podem existir pontos de *equilíbrio* estáveis e instáveis, isto é, soluções constantes $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_e, t_0) \equiv \mathbf{x}_e$ que satisfazem $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) \equiv 0$. Se um ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e é assintoticamente estável, então ele tem uma *região de atração*, um conjunto Ω de estados iniciais \mathbf{x}_0 tal que $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \mathbf{x}_e$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}_0 \in \Omega^3$, condição conhecida como estabilidade *regional* (Krstić *et al.*, 1995). Caso contrário trata-se de uma condição de estabilidade *local*. Quando a região de atração é o espaço inteiro \mathbb{R}^n , então o sistema satisfaz a condição de estabilidade é *global*.

Sendo de interesse o critério de estabilidade, para estas condições usando-se os pontos de equilíbrio, não é exigido o conhecimento das soluções de forma explícita para a equação (4.1). O método direto de Lyapunov determina as propriedades de estabilidade de $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ das propriedades de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ e sua relação com uma função definida positiva $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Para resultados globais, esta função deve ser radialmente ilimitada, ou seja, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ uniforme em t . Por simplicidade, assumiremos que a translação para a origem tenha sido executada, ou seja, $\mathbf{f}(0, t) \equiv 0$, e portanto, a solução é $\mathbf{x} \equiv 0$.

Definição 4.1. *A origem $\mathbf{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio de (4.1) se*

$$\mathbf{f}(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.5)$$

Definição 4.2. *Uma função contínua $\alpha : [0, \mathbf{a}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita que pertence à classe \mathcal{K} se é estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Diz-se que pertence à classe \mathcal{K}_∞ se $\mathbf{a} = \infty$ e $\alpha(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$ quando $\mathbf{r} \rightarrow \infty$*

Definição 4.3. *Uma função contínua $\beta : [0, \mathbf{a}] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dito que pertence à classe \mathcal{KL} se para cada s fixo, o mapeamento $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ pertence à classe \mathcal{K} em relação a \mathbf{r} , e para cada \mathbf{r} fixo, o mapeamento $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é decrescente em relação a \mathbf{s} e $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. Diz-se que pertence à classe \mathcal{KL}_∞ se, em adição, para cada \mathbf{s} fixo, o mapeamento $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ pertence à classe \mathcal{K}_∞ com relação a \mathbf{r} .*

¹do inglês Estabilidade Assintótica Uniforme (*Uniform Asymptotic Stability*) (**UAS**)

Definição 4.4. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ da equação (4.1) é:

- **Uniformemente estável**, se existe uma função $\alpha(\cdot)$ de classe \mathcal{K} e uma constante positiva \mathbf{c} , independente de t_0 , tal que

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \alpha(|\mathbf{x}(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}(t_0)/|\mathbf{x}(t_0)| < \mathbf{c}; \quad (4.6)$$

- **Uniformemente assintoticamente estável**, se existe uma função $\beta(\cdot, \cdot)$ de classe \mathcal{KL} e uma constante positiva \mathbf{c} , independente de t_0 , tal que

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(|\mathbf{x}(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}(t_0)/|\mathbf{x}(t_0)| < \mathbf{c}; \quad (4.7)$$

- **Exponencialmente estável**, se a equação (4.7) é satisfeita com $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{k}re^{-\varrho s}$, $\mathbf{k} > 0$, $\varrho > 0$;
- **Globalmente uniformemente estável**, se a equação (4.6) é satisfeita com $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ para algum estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$;
- **Globalmente uniformemente assintoticamente estável**, se a equação (4.7) é satisfeita com $\beta \in \mathcal{KL}_\infty$ para algum estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$; e
- **Globalmente exponencialmente estável**, se a equação (4.7) é satisfeita para algum estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ e com $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{k}re^{-\varrho s}$, $\mathbf{k} > 0$, $\varrho > 0$.

Em seguida, o principal teorema de estabilidade de Lyapunov é formulado

Teorema 4.1 (Estabilidade Uniforme). (*Krstić et al., 1995*) Seja $\mathbf{x} = 0$ um ponto de equilíbrio da equação (4.1) e $\mathbf{X} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / |\mathbf{x}| < \mathbf{r}$. Seja $\mathbf{V} : \mathbf{X} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função continuamente diferenciável tal que $\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$,

$$\alpha_1(|\mathbf{x}|) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(|\mathbf{x}|) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3(|\mathbf{x}|), \quad (4.9)$$

Então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ é:

- **Uniformemente estável**, se α_1 e α_2 são funções da classe \mathcal{K} sobre $[0, \mathbf{r})$ e $\alpha_3(\cdot) \geq 0$ sobre $[0, \mathbf{r})$;

- **Uniformemente assintoticamente estável**, se α_1 , α_2 e α_3 são funções da classe \mathcal{K} sobre $[0, \mathbf{r})$;
- **Exponencialmente estável**, se $\alpha_i(\rho) = \mathbf{k}_i \rho^\varrho$ sobre $[0, \mathbf{r})$, $\mathbf{k}_i > 0$, $\varrho > 0$, $i = 1, 2, 3$;
- **Globalmente uniformemente estável**, se $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, α_1 e α_2 são funções da classe \mathcal{K}_∞ , e $\alpha_3(\cdot) \geq 0$ sobre \mathbb{R}_+ ;
- **Globalmente uniformemente assintoticamente estável**, se $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, α_1 e α_2 são funções da classe \mathcal{K}_∞ , e α_3 é uma função da classe \mathcal{K} sobre \mathbb{R}_+ ; e
- **Globalmente exponencialmente estável**, se $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ e $\alpha_i(\rho) = \mathbf{k}_i \rho^\varrho$ sobre \mathbb{R}_+ , $\mathbf{k}_i > 0$, $\varrho > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Em geral, sabendo que o objetivo é alcançar a convergência de dentro de um conjunto, a estabilidade assintótica uniforme é uma propriedade desejável, porque os sistemas podem lidar melhor com perturbações e distúrbios. Assim, força o erro de rastreamento nulo. Esta propriedade é referida a *regulação* quando o sinal de referência é constante, e o *rastreamento* quando é um sinal variante no tempo. Para a análise de convergência, uma ferramenta útil é o teorema de LaSalle e Yoshizawa.

Teorema 4.2 (LaSalle-Yoshizawa). (*Krstić et al., 1995*) *Seja $\mathbf{x} = 0$ um ponto de equilíbrio de (4.1) e suponha que \mathbf{f} é localmente Lipschitz em \mathbf{x} uniformemente em t . Seja $\mathbf{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função continuamente diferenciável, tal que*

$$\alpha_1(|\mathbf{x}|) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(|\mathbf{x}|) \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq -\mathbf{W}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (4.11)$$

$\forall t \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onde α_1 e α_2 são funções da classe \mathcal{K}_∞ e \mathbf{W} é uma função contínua. Então, todas as soluções de (4.1) são globalmente uniformemente limitados e satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (4.12)$$

Além disso, se $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ é definida positiva, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ é *Globalmente Uniformemente Assintoticamente Estável* (Globally Uniformly Asymptotically Stable) (**GUAS**).

O método direto de Lyapunov pode ser aplicado sem resolver a equação diferencial (4.1). No entanto, não há um método sistemático para encontrar as funções candidatas a Lyapunov. Em alguns casos, funções naturais candidatas a Lyapunov surgem a partir de funções de energia, como descritos em sistemas elétricos e mecânicos (Khalil, 1992).

O teorema de LaSalle-Yoshizawa é aplicável a sistemas variantes no tempo e nos permite estabelecer a convergência para o conjunto \mathbf{E} , onde $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = 0$. Para a maioria das tarefas, a função $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ é construída, tal que o conjunto \mathbf{E} contempla unicamente trajetórias com erro rastreamento nulo. Podemos esperar que a trajetória do sistema se aproxima de \mathbf{E} quando t tende a ∞ . Para garantir o erro de rastreamento nulo, introduzimos o lema a seguir.

Lema 4.1 (Barbalat). (*Krstić et al., 1995*) *Considere a função $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Se ϕ é uniformemente contínua e o $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \phi(\tau) d\tau$ existe e é finito, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0. \quad (4.13)$$

Introduzido as preliminares teóricas, o desenvolvimento do controlador para um VANT hexarrotor é apresentado a seguir.

4.3 Projeto do Controlador por Backstepping Aplicado ao Hexarrotor

O objetivo do método por backstepping é proporcionar um processo sistemático para o projeto do controlador, um algoritmo passo a passo. A prova das propriedades é uma consequência direta do processo recursivo, quando as funções candidatas a Lyapunov são escolhidas para todo o sistema, incluindo as estimativas dos parâmetros (Zhou e Wen, 2008)

Nesta seção, com base na modelagem descrita no capítulo 2 e as medidas fornecidas pelo estimador no capítulo 3, o projeto do controlador para o VANT hexarrotor é proposto. Usando a técnica por backstepping com base em Madani e Benallegue (2007), o objetivo é assegurar a convergência do vetor $\{x(t), y(t), z(t), \psi(t)\}$ para as trajetórias desejadas $\{x_d(t), y_d(t), z_d(t), \psi_d(t)\}$, e, estabilizar os ângulos de *arfagem* e de *rolagem* $\{\phi(t), \theta(t)\}$, respectivamente. A estratégia da lei de controle, pode ser

vista como três subsistemas interconectados: Um subsistema sub-atuado $\{x, y, \phi$ e $\theta\}$; um subsistema totalmente atuado $\{\psi$ e $z\}$, e um subsistema dos propulsores, representados pelas velocidades angulares $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.

Para este propósito, as leis de controle virtuais são descritos pelos seguintes passos:

- (i) Para o primeiro passo, considere o seguinte sistema virtual, $\dot{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\nu}_1$. Seja o primeiro erro de rastreamento, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1$ e considerando a seguinte função candidata a *Lyapunov*, $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1$. A derivada no domínio do tempo é,

$$\dot{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{z}_1^T \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1^T (\dot{\mathbf{x}}_{1d} - \boldsymbol{\nu}_1). \quad (4.14)$$

Introduzimos a primeira variável de entrada de controle virtual $\boldsymbol{\nu}_1$ com o objetivo de estabilizar \mathbf{z}_1 :

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_{1d}; \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$ é uma matriz definida positiva. A equação (4.14) resulta em, $\dot{\mathbf{V}}_1 = -\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 < 0$.

- (ii) Para o segundo passo, considere o sistema virtual, $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_0 + \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\nu}_2$, onde $\boldsymbol{\nu}_2$ é a segunda variável de entrada de controle virtual. Seja a dinâmica do erro de rastreamento definida como, $\mathbf{z}_2 = \boldsymbol{\nu}_1 - \mathbf{x}_2$, resultando em $\dot{\mathbf{z}}_1 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$. Conseqüentemente, considere a função candidata a *Lyapunov*, $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i$, e derivando-o no domínio do tempo, resulta

$$\dot{\mathbf{V}}_2 = -\mathbf{z}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T (\mathbf{z}_1 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_1 - \mathbf{f}_0 - \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\nu}_2). \quad (4.16)$$

A estabilização de \mathbf{z}_2 , pode ser obtida introduzindo a seguinte lei de controle virtual

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \mathbf{g}_0^{-1} (\mathbf{z}_1 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_1 - \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_2); \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$ e $\det(\mathbf{g}_0) > 0$, se $\sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \neq 0$. Portanto, \mathbf{g}_0 é não singular em normais condições de operação produzindo $\dot{\mathbf{V}}_2 = -\sum_{i=1}^2 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i < 0$.

- (iii) Para o terceiro passo, assumo o sistema virtual $\dot{\mathbf{x}}_3 = \boldsymbol{\nu}_3$, e, seja $\mathbf{z}_3 = \boldsymbol{\nu}_2 - \boldsymbol{\varphi}_0$. Assim, $\dot{\mathbf{z}}_2 = -\mathbf{z}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{g}_0 \mathbf{z}_3$. Considere-se a seguinte função candidata a

Lyapunov, $\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i$, cuja derivada no domínio do tempo resulta em

$$\dot{\mathbf{V}}_3 = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{z}_3^T (\mathbf{g}_0^T \mathbf{z}_2 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 - \mathfrak{J}_0 \boldsymbol{\nu}_3); \quad (4.18)$$

onde \mathfrak{J}_0 é a matriz *Jacobiana* de $\boldsymbol{\varphi}_0$, tal que

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x}_3)}{\partial \mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

é não singular se satisfaz, $-\pi/2 < \phi, \theta < \pi/2$. A estabilização de \mathbf{z}_3 pode ser obtida introduzindo uma nova lei de controle virtual descrita por

$$\boldsymbol{\nu}_3 = \mathfrak{J}_0^{-1} (\mathbf{g}_0^T \mathbf{z}_2 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{z}_3) \quad (4.19)$$

com $\mathbf{A}_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$ e que produz $\dot{\mathbf{V}}_3 = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i < 0$.

- (iv) Considere-se o sistema virtual de um subsistema sub-atuado $\dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_1 \boldsymbol{\nu}_4$ e o erro de rastreamento, $\mathbf{z}_4 = \boldsymbol{\nu}_3 - \mathbf{x}_4$, então $\dot{\mathbf{z}}_3 = -\mathbf{A}_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{g}_0^T \mathbf{z}_2 + \mathfrak{J}_0 \mathbf{z}_4$. Escolhendo uma função candidata a *Lyapunov* para o subsistema sub-atuado, $\mathbf{V}_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i$. Cujas derivada no tempo é dado por

$$\dot{\mathbf{V}}_4 = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{z}_4^T (\mathfrak{J}_0^T \mathbf{z}_3 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_3 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{g}_1 \boldsymbol{\nu}_4). \quad (4.20)$$

A estabilização do subsistema, introduzindo uma lei de controle virtual é dada por

$$\boldsymbol{\nu}_4 = \mathbf{g}_1^{-1} (\mathfrak{J}_0^T \mathbf{z}_3 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_3 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{A}_4 \mathbf{z}_4); \quad (4.21)$$

onde $\mathbf{A}_4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$, e $\det(\mathbf{g}_1) > 0$, é não singular quando $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Portanto, $\dot{\mathbf{V}}_4 = - \sum_{i=1}^4 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i < 0$, o subsistema é assintoticamente estável, quando as entradas são descritas por $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$ e $\boldsymbol{\nu}_4$. Uma vez estabilizado o subsistema sub-atuado, resta estabilizar o subsistema totalmente atuado. Para realizar esta tarefa, seguiremos os seguintes passos.

- (v) Neste passo, assumo o sistema virtual $\dot{\mathbf{x}}_5 = \boldsymbol{\nu}_5$ e Seja o erro de rastreamento, $\mathbf{z}_5 = \mathbf{x}_{5d} - \mathbf{x}_5$. A função candidata a *Lyapunov* escolhida é $\mathbf{V}_5 = \frac{1}{2} \mathbf{z}_5^T \mathbf{z}_5$. Sendo, a derivada no tempo

$$\dot{\mathbf{V}}_5 = \mathbf{z}_5^T \dot{\mathbf{z}}_5 = \mathbf{z}_5^T (\dot{\mathbf{x}}_{5d} - \boldsymbol{\nu}_5). \quad (4.22)$$

A estabilização de \mathbf{z}_5 pode ser selecionada a partir da lei de controle virtual

$$\boldsymbol{\nu}_5 = \mathbf{A}_5 \mathbf{z}_5 + \dot{\mathbf{x}}_{5d}; \quad (4.23)$$

onde $\mathbf{A}_5 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$, produz $\dot{\mathbf{V}}_5 = -\mathbf{z}_5^T \mathbf{A}_5 \mathbf{z}_5 < 0$.

- (vi) Seja o sistema $\dot{\mathbf{x}}_6 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{g}_2 \boldsymbol{\nu}_6$ e o erro de rastreamento $\mathbf{z}_6 = \boldsymbol{\nu}_5 - \mathbf{x}_6 = \mathbf{A}_5 \mathbf{z}_5 + \dot{\mathbf{x}}_{5d} - \dot{\mathbf{x}}_5$. Logo, $\dot{\mathbf{z}}_5 = -\mathbf{A}_5 \mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_6$. A função candidata a *Lyapunov* escolhida é $\mathbf{V}_6 = \frac{1}{2} \sum_{i=5}^6 \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i$. Derivando a função no domínio do tempo resulta,

$$\dot{\mathbf{V}}_6 = -\mathbf{z}_5^T \mathbf{A}_5 \mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_6^T (\mathbf{z}_5 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_5 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{g}_2 \boldsymbol{\nu}_6). \quad (4.24)$$

A estabilização pode ser obtida com a introdução da seguinte lei de controle virtual

$$\boldsymbol{\nu}_6 = \mathbf{g}_2^{-1} (\mathbf{z}_5 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_5 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{A}_6 \mathbf{z}_6); \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{A}_6 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$, e $\det(\mathbf{g}_2) > 0$ é não singular quando $-\pi/2 < \phi, \theta < \pi/2$.

Introduzido a lei de controle, obtém-se $\dot{\mathbf{V}}_6 = -\sum_{i=5}^6 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i < 0$. No passo seguinte, será desenvolvida a lei de controle real que estabiliza o sistema.

- (vii) Para o passo final, assumo o sistema dos rotores $\dot{\mathbf{x}}_7 = \mathbf{f}_3 + \mathbf{g}_3 \boldsymbol{\delta}$ e seja

$$\mathbf{z}_7 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_4 - \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_6 - \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Imediatamente temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_4 &= -\tilde{\mathfrak{J}}_0^T \mathbf{z}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{z}_4 + [\mathbf{g}_1, \mathbf{0}_{2 \times 2}] \mathbf{z}_7; \\ \dot{\mathbf{z}}_6 &= -\mathbf{z}_5 - \mathbf{A}_6 \mathbf{z}_6 + [\mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{g}_2] \mathbf{z}_7. \end{aligned}$$

A função global candidata a *Lyapunov* para o sistema VANT hexarrotor é

descrita por, $\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i$, sendo sua derivada no tempo expressa por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= \sum_{i=1}^7 \mathbf{z}_i^T \dot{\mathbf{z}}_i \\ &= -\sum_{i=1}^6 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{z}_7^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{z}_4 + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}_6 + \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}_4 - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_6 - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2 \end{bmatrix} \right); \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \tilde{\mathfrak{J}}_1 [\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4, \dot{\omega}_5, \dot{\omega}_6]^T$ e $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_2 = \tilde{\mathfrak{J}}_2 [\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4, \dot{\omega}_5, \dot{\omega}_6]^T$, quando

$$\tilde{\mathfrak{J}}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}_7)}{\partial \mathbf{x}_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1\omega_3 & a_1\omega_4 & -a_1\omega_5 & -a_1\omega_6 \\ -2a_2\omega_1 & -2a_2\omega_2 & a_2\omega_3 & a_2\omega_4 & a_2\omega_5 & a_2\omega_6 \end{bmatrix};$$

e

$$\tilde{\mathfrak{J}}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}_7)}{\partial \mathbf{x}_7} = \begin{bmatrix} a_3\omega_1 & a_3\omega_2 & a_3\omega_3 & a_3\omega_4 & a_3\omega_5 & a_3\omega_6 \\ a_4\omega_1 & -a_4\omega_2 & a_4\omega_3 & -a_4\omega_4 & a_4\omega_5 & -a_4\omega_6 \end{bmatrix};$$

sabendo que, $a_1 = \sqrt{3}l\rho C_T AR^2$; $a_2 = l\rho C_T AR^2$; $a_3 = 2\rho C_T AR^2$ e $a_4 = 2\rho C_Q AR^3$.

Em Sanca *et al.* (2010c), uma forma de representar o sinal de controle é fornecida por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathfrak{g}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_4 \\ \mathbf{z}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\nu}_4 \\ \dot{\nu}_6 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_7 \mathbf{z}_7 - \\ & - \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_1 \\ \tilde{\mathfrak{J}}_2 \end{bmatrix} \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_3 \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_1 \\ \tilde{\mathfrak{J}}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{6 \times 1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

A equação (4.28) descreve uma equação redundante da forma $\mathcal{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{b}$, onde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ é definido por:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathcal{A}^\# \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathcal{A}^\# \mathcal{A}) \mathfrak{z} \quad (4.29)$$

onde $\mathfrak{z} \in \mathbb{R}^6$, $\mathcal{A}^\#$ é uma matriz pseudo-inversa de \mathcal{A} , $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^6$ é uma matriz identidade e $\boldsymbol{\delta} = \mathcal{A}^\# \mathbf{b}$ mínimo. Aplicando o método de mínimos quadrados, os sinais de largura de pulso podem ser expressos por:

$$\min \|\mathbf{b} - \mathcal{A}\boldsymbol{\delta}\|. \quad (4.30)$$

De uma outra forma, a estabilização do sistema pode ser obtida através da introdução de uma lei de controle a seguir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{\text{mov}} = \mathfrak{g}_3^{-1} & \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_1 \\ \tilde{\mathfrak{J}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_3 \right)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_1^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathfrak{g}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_4 \\ \mathbf{z}_6 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \dot{\nu}_4 \\ \dot{\nu}_6 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_7 \mathbf{z}_7 - \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_1 \\ \tilde{\mathfrak{J}}_2 \end{bmatrix} \mathfrak{f}_3 \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

sabendo que $\mathbf{A}_7 \in \mathbb{R}^{4 \times 4} > 0$, $\det([\tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2]^T \tilde{\mathfrak{J}}_3) > 0$, e, os sinais de controle para o hexarrotor são dados por $\boldsymbol{\delta} = \tilde{\mathfrak{J}}_3 \boldsymbol{\delta}_{\text{mov}}$, sendo

$$\tilde{\mathfrak{J}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) & 1 \\ 1 & \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) & -1 \\ 1 & \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) & 1 \\ 1 & \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) & -1 \end{bmatrix}.$$

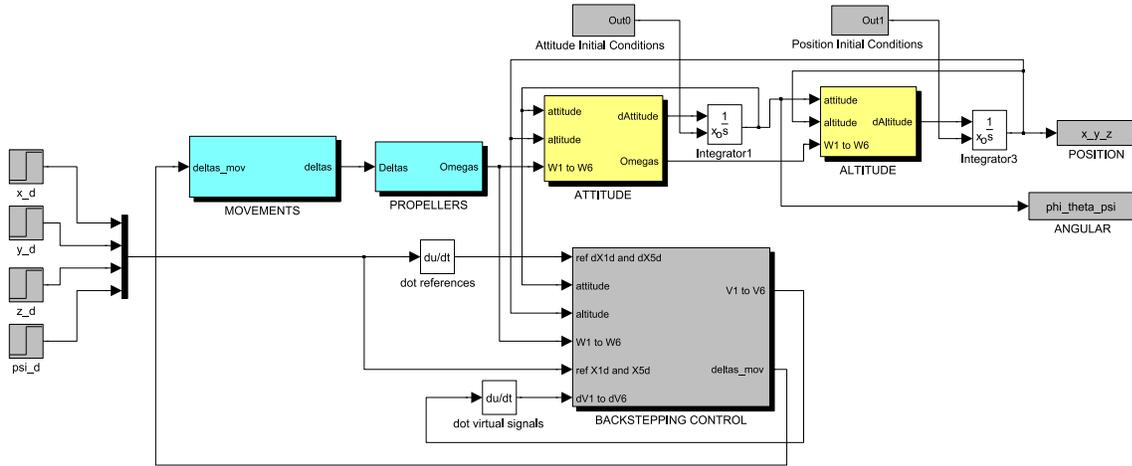


Figura 4.1: Representação do esquema de controle por backstepping para o VANT hexarrotor. Sinais de referência: $\mathbf{x}_{1d} = [x_d, y_d]^T$ e $\mathbf{x}_{5d} = [z_d, \psi_d]^T$. As trajetórias geradas para os sinais de referência x_d, y_d, z_d and ψ_d são realizadas com o uso funções de transferência com comportamento suave e com condições iniciais nulas.

δ_{mov} , corresponde o vetor de movimentos: coletivo, longitudinal, latitudinal e guinada $\delta_{\text{mov}} = [\delta_{\text{col}}, \delta_{\text{lon}}, \delta_{\text{lat}}, \delta_{\text{ped}}]^T$.

Ao introduzir a lei de controle da equação (4.31) em (4.27), a derivada da função de energia resulta em $\dot{V} = -\sum_{i=1}^7 \mathbf{z}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i < 0$. Conseqüentemente, usando as leis de controle virtuais e o real, o sistema é assintoticamente estável. As leis são sumarizadas na equação (4.32):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1) + \dot{\mathbf{x}}_{1d} \\ \nu_2 = \mathbf{g}_0^{-1}[(\mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1) + \dot{\nu}_1 - \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_2(\nu_1 - \mathbf{x}_2)] \\ \nu_3 = \tilde{\mathbf{J}}_0^{-1}[\mathbf{g}_0^T(\nu_1 - \mathbf{x}_2) + \dot{\nu}_2 + \mathbf{A}_3(\nu_2 - \varphi_0)] \\ \nu_4 = \mathbf{g}_1^{-1}[\tilde{\mathbf{J}}_0^T(\nu_2 - \varphi_0) + \dot{\nu}_3 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{A}_4(\nu_3 - \mathbf{x}_4)] \\ \nu_5 = \mathbf{A}_5(\mathbf{x}_{5d} - \mathbf{x}_5) + \dot{\mathbf{x}}_{5d} \\ \nu_6 = \mathbf{g}_2^{-1}[(\mathbf{x}_{5d} - \mathbf{x}_5) + \dot{\nu}_5 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{A}_6(\nu_5 - \mathbf{x}_6)] \\ \delta_{\text{mov}} = \mathbf{g}_3^{-1} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_1 \\ \tilde{\mathbf{J}}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_3 \right)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{g}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_3 - \mathbf{x}_4 \\ \nu_5 - \mathbf{x}_6 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \dot{\nu}_4 \\ \dot{\nu}_6 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_7 \begin{bmatrix} \nu_4 - \varphi_1 \\ \nu_6 - \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_1 \\ \tilde{\mathbf{J}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{f}_3 \right\} \\ \delta = \tilde{\mathbf{J}}_3 \delta_{\text{mov}}. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

4.3.1 Simulações Numéricas do Projeto do Controlador

O modelo desenvolvido e a estratégia de controle por backstepping, implementados em Matlab/Simulink[®] para as simulações numéricas são ilustrados na figura 4.1,

Tabela 4.1: Parâmetros usados na simulação usados do VANT hexarrotor.

Symbol	unit
m	4.575kg
g	9.806m/s ²
l	0.325m
ρ	1.293kg/m ³
d	$1.2e^{-6}$ Nm s ²
m_1, m_2	2.144, 0.477kg
r_1, r_2, a	0.1, 0.1, 0.16m
k_t	$4.8e^{-2}$ N s/m
k_r	$6.4e^{-3}$ Nm s/rad
C_T	0.01458
C_Q	$1.037e - 3$
R	0.15m and $A = \pi R^2$
V_g	14.8V
R_m	0.036 Ω
J_m	$1.4e^{-5}$ kg m ²
J_r	$1.4e^{-5}$ kg m ²
k_m	$2.47e - 3$ kg m/A

e, os parâmetros usados na simulação são listadas na tabela 4.2. A fim de verificar a eficiência da lei de controle por backstepping, uma simulação foi realizada usando o método de integração por *Runge-Kutta de quarta ordem*, para estimar as leis de controle virtuais $\dot{\nu}_i$ e as derivadas analíticas foram conduzidas usando a aproximação por diferenças finitas no tempo: $\dot{\nu}_i = \frac{\Delta \nu_i}{\Delta t}$; sendo $i = 1, \dots, 6$, onde $\Delta \nu_i$ representa a variação do valor de entrada e Δt é a mudança no tempo desde o instante prévio. As condições iniciais para o sistema são: $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_3(0) = \mathbf{x}_4(0) = \mathbf{x}_5(0) = \mathbf{x}_6(0) = [0, 0]^T$ e $\mathbf{x}_7(0) = \frac{mg}{6\rho C_T A R^2} [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$. A partir das condições necessárias obtidas no procedimento passo a passo, os seguintes parâmetros para os controladores foram usadas: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_6 = \text{diag}([10, 10])$ e $\mathbf{A}_7 = \text{diag}([10, 10, 10, 10])$.

A figura 4.2 mostra as posições e o erro de rastreamento para o hexarrotor respectivamente. Observa-se um acompanhamento desejado e nota-se os valores adotados pelo controlador para os ângulos (ϕ, θ) . Os resultados mostram um bom desempenho do controlador com valores mínimos do erro de rastreamento, com sinais de

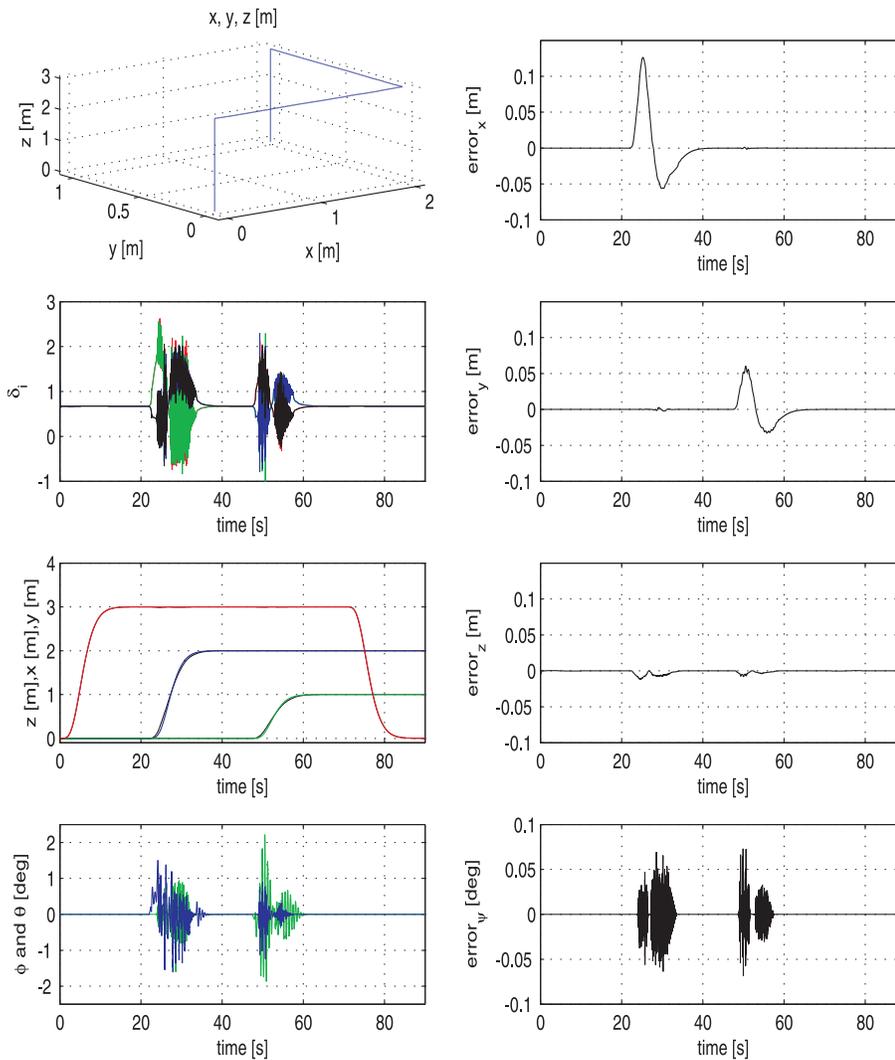


Figura 4.2: Erro de rastreamento para x , y , z e ψ , aplicando a técnica backstepping no **VANT** hexarroto.

controle δ_i aceitáveis e fisicamente realizáveis.

Uma outra implementação usa um controlador **PID**, com o objetivo de comparação é apresentado nas figuras 4.3 e 4.4. Os resultados mostram o controle pairado para a variável $z = 10\text{m}$ com velocidades do ar linear e angular nulos, e, outro resultado com velocidades $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$. Pode-se observar o comportamento de estabilidade assintótica tendendo a zero, para o sistema em malha fechada. porém, exige-se um maior esforço do sinal de controle.

Para a técnica de controle por backstepping, o desafio está na determinação dos

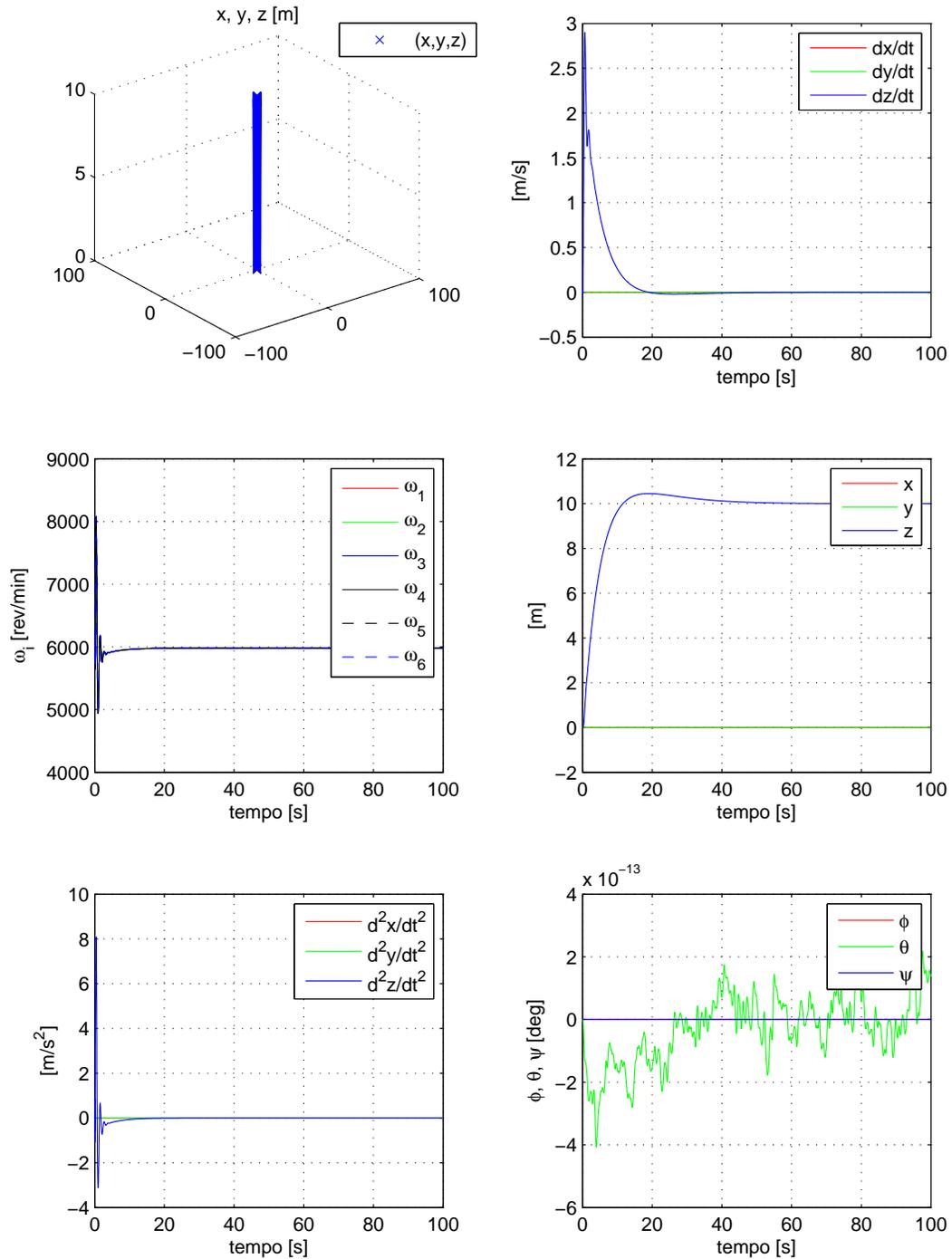


Figura 4.3: Resposta do hexarrotor com controle **PID**, realizando movimento vertical pairado ao longo do eixo, $z = 10\text{m}$, com V_{air} e Ω_{air} nulos.

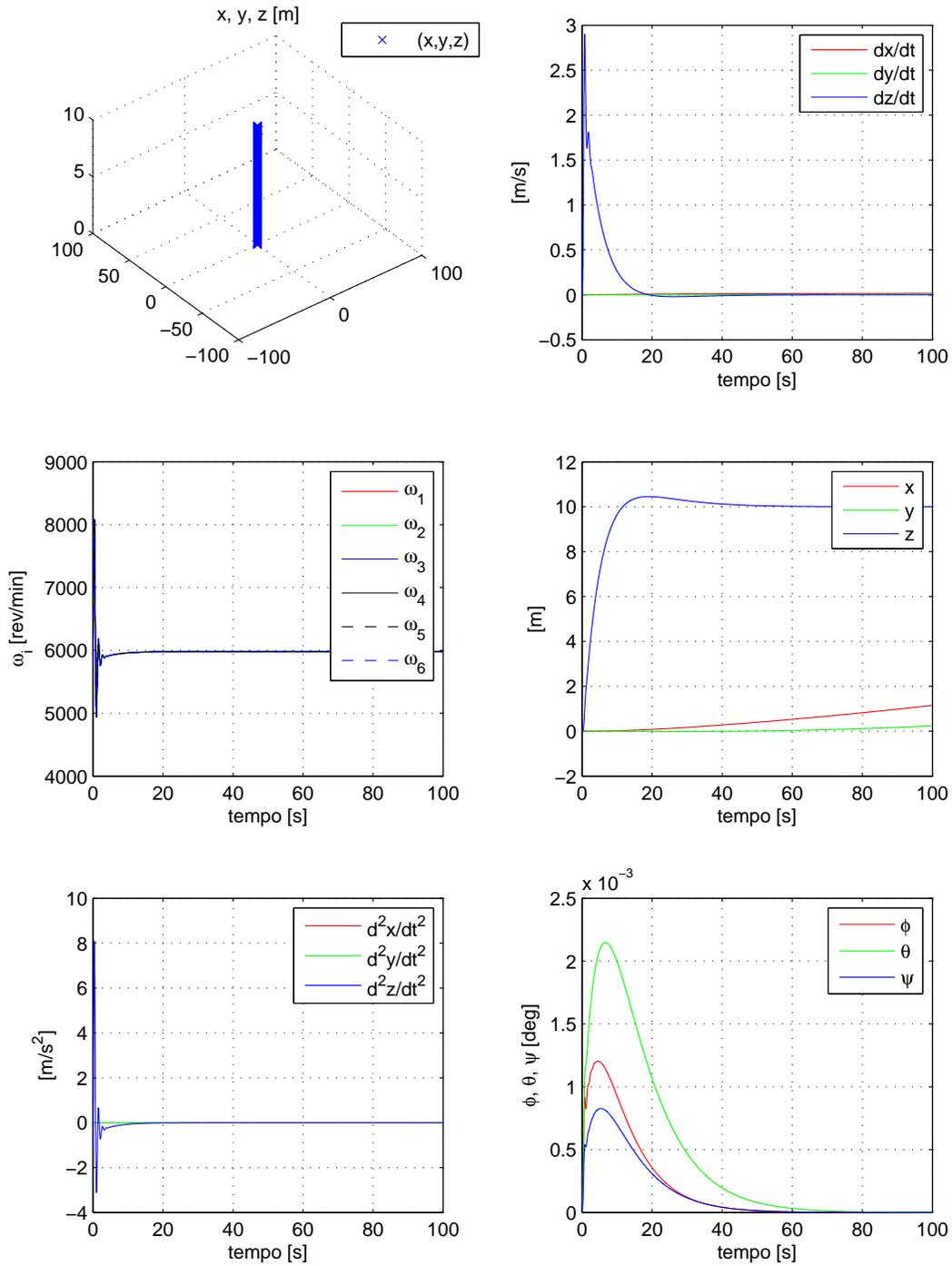


Figura 4.4: Resposta do hexarrotor com controle **PID**, realizando movimento vertical pairado ao longo do eixo, $z = 10\text{m}$ com $V_{\text{air}} = [0.1, 0.1, 0.1]\text{m/s}$ e $\Omega_{\text{air}} = [0.01, 0.01, 0.01]\text{rad/s}$.

parâmetros do controlador. A condição necessária em que os parâmetros sejam definidos positivos não é válida para a propriedade de regulação, quando entradas como perturbações são levadas em consideração. Assim, é preciso determinar os ganhos e seus valores limiares que garantam ao sistema voos em ambientes com diversos tipos de perturbações com características limitadas. Nesse sentido, uma abordagem por backstepping robusto é o apropriado, como proposta na seguinte seção.

4.4 Projeto do Controlador Robusto por Backstepping

Ao manipular as equações (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) e (2.43), um modelo simplificado para o movimento cartesiano resultante dos movimentos de translação e rotação do hexarrotor pode ser descrito como é sumarizado a seguir:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi))\frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m}(\dot{x} - V_{\text{xair}}) \\ \ddot{y} = (c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi))\frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m}(\dot{y} - V_{\text{yair}}) \\ \ddot{z} = -g + c(\phi)c(\theta)\frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m}(\dot{z} - V_{\text{zair}}) \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}}\right) + \frac{\mathbf{u}_2}{J_{xx}} - \frac{k_r}{J_{xx}}(\dot{\phi} - \Omega_{\text{xair}}) \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}}\right) + \frac{\mathbf{u}_3}{J_{yy}} - \frac{k_r}{J_{yy}}(\dot{\theta} - \Omega_{\text{yair}}) \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}}\right) + \frac{\mathbf{u}_4}{J_{zz}} - \frac{k_r}{J_{zz}}(\dot{\psi} - \Omega_{\text{zair}}) \end{cases} \quad (4.33)$$

Na equação (4.33), $\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$ representam as acelerações das variáveis de atitude resultante da rotação do corpo rígido, e, \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} representam as acelerações das variáveis de posição devido à ação dos três pares de rotores coaxiais contrarrotativos. As variáveis Ω_{iair} 's e V_{iair} 's são os componentes de distúrbios de vento angular e linear ao longo do eixos x , y e z . Além disso, denota-se $c(\cdot) \triangleq \cos(\cdot)$, $s(\cdot) \triangleq \sin(\cdot)$, e as novas variáveis de entrada de atuação dos três pares de rotores coaxiais contrarrotativos (equações (2.41) e (2.42)), para gerar os movimentos de deslocamento vertical e

angular representados por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e \mathbf{u}_4 , sendo

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 &= \rho C_T A R^2 \sum_{i=1}^6 \omega_i^2 \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{l^2} l \rho C_T A R^2 (\omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2) \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\rho C_T A R^2}{2} (\omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2) \\ \mathbf{u}_4 &= \rho C_Q A R^3 \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \omega_i^2 \end{cases} \quad (4.34)$$

O modelo em (4.33) é reorganizado na forma de equações de espaço estado, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, e, introduzimos as variáveis $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{12}]^T = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T \in \mathbb{R}^{12}$. Portanto,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_6 + \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_2 - \mathbf{b}_1 k_r (\mathbf{x}_2 - \Omega_{\text{xair}}) \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_6 + \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_3 - \mathbf{b}_2 k_r (\mathbf{x}_4 - \Omega_{\text{yair}}) \\ \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_4 - \mathbf{b}_3 k_r (\mathbf{x}_6 - \Omega_{\text{zair}}) \\ \mathbf{x}_8 \\ -g + c(\mathbf{x}_1) c(\mathbf{x}_3) \frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_8 - \dot{z}_{\text{air}}) \\ \mathbf{x}_{10} \\ \boldsymbol{\mu}_x \frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_{10} - \dot{x}_{\text{air}}) \\ \mathbf{x}_{12} \\ \boldsymbol{\mu}_y \frac{\mathbf{u}_1}{m} - \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_{12} - \dot{y}_{\text{air}}) \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

Sabendo que, $\mathbf{a}_1 = (J_{yy} - J_{zz})/J_{xx}$, $\mathbf{a}_2 = (J_{zz} - J_{xx})/J_{yy}$, $\mathbf{a}_3 = (J_{xx} - J_{yy})/J_{zz}$, $\mathbf{b}_1 = 1/J_{xx}$, $\mathbf{b}_2 = 1/J_{yy}$, $\mathbf{b}_3 = 1/J_{zz}$, $\boldsymbol{\mu}_x = \cos(\mathbf{x}_1) \sin(\mathbf{x}_3) \cos(\mathbf{x}_5) + \sin(\mathbf{x}_1) \sin(\mathbf{x}_5)$ e $\boldsymbol{\mu}_y = \cos(\mathbf{x}_1) \sin(\mathbf{x}_3) \sin(\mathbf{x}_5) - \sin(\mathbf{x}_1) \cos(\mathbf{x}_5)$.

Note-se nas equações (4.33) e (4.35), que os componentes de posição e suas derivadas, dependem dos componentes angulares. No entanto, os componentes angulares são independentes da posição. Nesta seção, um controlador robusto por backstepping com base no procedimento sistemático apresentado em Bouabdallah *et al.* (2007) é proposto. O objetivo é garantir a convergência dos estados $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e $\psi(t)$ para as trajetórias desejadas, fornecidas pelas variáveis $x_d(t)$, $y_d(t)$, $z_d(t)$ e $\psi_d(t)$ respectivamente e, Assim, estabilizar os ângulos de atitude $\{\phi(t)$ e $\theta(t)\}$.

Inicializando o procedimento, as leis de controle virtuais são descritas a seguir:

- (i) No primeiro passo, considere o primeiro erro de rastreamento, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1$. Afim de obter a estabilidade para equilíbrio $\mathbf{z}_1 = 0$, uma função candidata a *Lyapunov* é descrita como, $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^2$. Derivando a função respeito ao tempo resulta

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_1(\dot{\mathbf{x}}_{1d} - \mathbf{x}_2). \quad (4.36)$$

A estabilização de \mathbf{z}_1 pode ser obtida através da introdução de uma lei de controle virtual, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}_{1d} + \alpha_1\mathbf{z}_1$, onde $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ é um ganho que deve ser escolhido de acordo como o desempenho transitório desejado. Assim, a equação (4.36) resulta em

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1) = -\alpha_1\mathbf{z}_1^2 < 0;$$

- (ii) Para garantir a convergência do estado \mathbf{x}_2 , seja definido o erro de rastreamento para a variável de controle virtual $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \alpha_1\mathbf{z}_1$, resultando em $\dot{\mathbf{z}}_1 = -\alpha_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$. Para este passo, considere a função candidata a *Lyapunov*

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mathbf{z}_i^2.$$

A derivada no domínio do tempo resulta em

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = & -\alpha_1\mathbf{z}_1^2 + \mathbf{z}_2[-\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{x}_4\mathbf{x}_6 + \mathbf{b}_1\mathbf{u}_2 - \\ & - \mathbf{b}_1k_r(\mathbf{x}_2 - \Omega_{\text{xair}}) + \alpha_1(\mathbf{z}_2 + \alpha_1\mathbf{z}_1)]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

A função é definida negativa se os ângulos de Euler variam lentamente ($\ddot{\mathbf{x}}_{1d} = 0$). Assim, a estabilização de \mathbf{z}_2 pode ser obtida através da introdução da seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 = & \frac{1}{\mathbf{b}_1}[\mathbf{z}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{x}_4\mathbf{x}_6 + \mathbf{b}_1k_r(\mathbf{x}_2 - \Omega_{\text{xair}}) - \\ & - \alpha_1(\mathbf{z}_2 + \alpha_1\mathbf{z}_1) - \alpha_2\mathbf{z}_2]; \end{aligned} \quad (4.38)$$

sabendo que, $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{b}_1 > 0$. Usando a equação (4.38) em (4.37), resulta em

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = - \sum_{i=1}^2 \alpha_i\mathbf{z}_i^2 < 0,$$

que é assintoticamente estável. Evidentemente, a lei de controle definida em (4.38) estabiliza o sistema para qualquer valor positivo com ganhos α_1 e α_2 , mas requer, não apenas as medidas das variáveis \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , como também as medidas das variáveis \mathbf{x}_4 , \mathbf{x}_6 e Ω_{xair} , assim como o conhecimento dos parâmetros \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{b}_1 . Note-se que tanto as mudanças nos erros de rastreamento como dos parâmetros podem levar a uma mudança de sinal da função $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ e, conseqüentemente, à perda de estabilidade em malha fechada;

- (iii) Para o terceiro passo, seja o erro de rastreamento $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_{3d} - \mathbf{x}_3$ e considere a função candidata a *Lyapunov*,

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_3) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_3^2.$$

A estabilização de \mathbf{z}_3 pode ser obtida através da introdução de uma lei de controle virtual $\mathbf{x}_4 = \dot{\mathbf{x}}_{3d} + \alpha_3 \mathbf{z}_3$, com $\alpha_3 \in \mathbb{R}_+$, resultando em uma função definida negativa

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_3) = -\alpha_3 \mathbf{z}_3^2 < 0;$$

- (iv) Seja um erro de rastreamento associado $\mathbf{z}_4 = \mathbf{x}_4 - \dot{\mathbf{x}}_{3d} - \alpha_3 \mathbf{z}_3$, que resulta em $\dot{\mathbf{z}}_3 = -\mathbf{z}_4 - \alpha_3 \mathbf{z}_3$, e defina a função candidata a *Lyapunov* como

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4) = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^4 \mathbf{z}_i^2.$$

A estabilização de \mathbf{z}_4 pode ser obtida da seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\mathbf{b}_2} & [\mathbf{z}_3 - \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_6 + \mathbf{b}_2 k_r (\mathbf{x}_4 - \Omega_{\text{yair}}) - \\ & - \alpha_3 (\mathbf{z}_4 + \alpha_3 \mathbf{z}_3) - \alpha_4 \mathbf{z}_4]; \end{aligned} \quad (4.39)$$

com ganhos $\alpha_3 \in \mathbb{R}_+$ e $\alpha_4 \in \mathbb{R}_+$, e com o parâmetro $\mathbf{b}_2 > 0$, que produz

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4) = - \sum_{i=3}^4 \alpha_i \mathbf{z}_i^2 < 0;$$

- (v) De acordo com o mesmo procedimento que o passo anterior, seja o erro de rastreamento $\mathbf{z}_5 = \mathbf{x}_{5d} - \mathbf{x}_5$, e a lei de controle virtual $\mathbf{x}_6 = \dot{\mathbf{x}}_{5d} + \alpha_5 \mathbf{z}_5$, sabendo que $\alpha_5 \in \mathbb{R}_+$. Então, pode-se obter

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_5) = -\alpha_5 \mathbf{z}_5^2 < 0;$$

- (vi) Considere o erro de rastreamento $\mathbf{z}_6 = \mathbf{x}_6 - \dot{\mathbf{x}}_{5d} - \alpha_5 \mathbf{z}_5$, resultando em $\dot{\mathbf{z}}_5 = -\mathbf{z}_6 - \alpha_5 \mathbf{z}_5$, e a função candidata a *Lyapunov*

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6) = \frac{1}{2} \sum_{i=5}^6 \mathbf{z}_i^2.$$

A lei de controle obtida é

$$\mathbf{u}_4 = \frac{1}{\mathbf{b}_3} [\mathbf{z}_5 - \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3 k_r (\mathbf{x}_6 - \Omega_{\text{zair}}) - \alpha_5 (\mathbf{z}_6 + \alpha_5 \mathbf{z}_5) - \alpha_6 \mathbf{z}_6], \quad (4.40)$$

com $\alpha_6 \in \mathbb{R}_+$, e $\mathbf{b}_3 > 0$, que produz

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6) = - \sum_{i=5}^6 \alpha_i \mathbf{z}_i^2 < 0;$$

- (vii) Para o seguinte procedimento considera-se a dinâmica de altitude. Nesse sentido, seja definido o erro de rastreamento como $\mathbf{z}_7 = \mathbf{x}_{7d} - \mathbf{x}_7$. A entrada de controle virtual pode ser descrita como $\mathbf{x}_8 = \dot{\mathbf{x}}_{7d} + \alpha_7 \mathbf{z}_7$, sabendo que $\alpha_7 \in \mathbb{R}_+$ e produz

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_7) = -\alpha_7 \mathbf{z}_7^2 < 0;$$

- (viii) Seja o erro associado, $\mathbf{z}_8 = \mathbf{x}_8 - \dot{\mathbf{x}}_{7d} - \alpha_7 \mathbf{z}_7$, resultando em $\dot{\mathbf{z}}_7 = -\mathbf{z}_8 - \alpha_7 \mathbf{z}_7$ e defina a função candidata a *Lyapunov*

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_7, \mathbf{z}_8) = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^8 \mathbf{z}_i^2,$$

A lei de controle é descrita como

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m}{\cos(\mathbf{x}_3) \cos(\mathbf{x}_1)} [\mathbf{z}_7 + g + \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_8 - V_{\text{zair}}) - \alpha_7 (\mathbf{z}_8 + \alpha_7 \mathbf{z}_7) - \alpha_8 \mathbf{z}_8], \quad (4.41)$$

Sabendo que, $\alpha_8 \in \mathbb{R}_+$, e $\cos(\mathbf{x}_3) \cos(\mathbf{x}_1) > 0$. Isto resulta em

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_7, \mathbf{z}_8) = - \sum_{i=7}^8 \alpha_i \mathbf{z}_i^2 < 0;$$

- (ix) Contrário aos **GDLs** da atitude, a dinâmica da posição no plano horizontal não é controlada diretamente usando as entradas \mathbf{u}_1 . O controle da dinâmica da posição deve ser realizada através do uso das leis virtuais: $\boldsymbol{\mu}_x$ e $\boldsymbol{\mu}_y$. Para isso, seja o erro de rastreamento $\mathbf{z}_9 = \mathbf{x}_{9d} - \mathbf{x}_9$. A entrada de controle virtual $\mathbf{x}_{10} = \dot{\mathbf{x}}_{9d} + \alpha_9 \mathbf{z}_9$, que é associada com o erro $\mathbf{z}_{10} = \mathbf{x}_{10} - \dot{\mathbf{x}}_{9d} - \alpha_9 \mathbf{z}_9$, resulta em $\dot{\mathbf{z}}_9 = -\mathbf{z}_{10} - \alpha_9 \mathbf{z}_9$. Finalmente, defina-se a função candidata a *Lyapunov*

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_9, \mathbf{z}_{10}) = \frac{1}{2} \sum_{i=9}^{10} \mathbf{z}_i^2,$$

e a lei de controle pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x = \frac{m}{\mathbf{u}_1} & \left[\mathbf{z}_9 - \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_{10} - V_{\text{vair}}) - \alpha_9 (\mathbf{z}_{10} + \alpha_9 \mathbf{z}_9) - \right. \\ & \left. - \alpha_{10} \mathbf{z}_{10} \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para a estabilidade da posição no eixo x , sabendo que os ganhos $\alpha_9 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_{10} \in \mathbb{R}_+$, e $\mathbf{u}_1 > 0$, são definidos positivos. Isto resulta

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_9, \mathbf{z}_{10}) = - \sum_{i=9}^{10} \alpha_i \mathbf{z}_i^2 < 0;$$

- (x) De forma similar, seja definido o erro de rastreamento $\mathbf{z}_{11} = \mathbf{x}_{11d} - \mathbf{x}_{11}$, a entrada de controle virtual $\mathbf{x}_{12} = \dot{\mathbf{x}}_{11d} + \alpha_{11} \mathbf{z}_{11}$, associada com a variável do erro $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{x}_{12} - \dot{\mathbf{x}}_{11d} - \alpha_{11} \mathbf{z}_{11}$. A função candidata a *Lyapunov* escolhida é expressa da seguinte forma

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_{11}, \mathbf{z}_{12}) = \frac{1}{2} \sum_{i=11}^{12} \mathbf{z}_i^2,$$

e obtendo a seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_y = \frac{m}{\mathbf{u}_1} & \left[\mathbf{z}_{11} - \frac{k_t}{m} (\mathbf{x}_{12} - V_{\text{vair}}) - \alpha_{11} (\mathbf{z}_{12} + \alpha_{11} \mathbf{z}_{11}) - \right. \\ & \left. - \alpha_{12} \mathbf{z}_{12} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim, estabiliza-se a posição ao longo do eixo y , para os parâmetros $\alpha_{11} \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_{12} \in \mathbb{R}_+$, e $\mathbf{u}_1 > 0$, produzindo

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_{11}, \mathbf{z}_{12}) = - \sum_{i=11}^{12} \alpha_i \mathbf{z}_i^2 < 0.$$

Das equações (4.42) e (4.43), os sinais de referência para os ângulos de rolagem ϕ_d e arfagem θ_d , no plano horizontal podem ser expressos por

$$\mathbf{x}_{1d} = \arctan \left[\frac{\boldsymbol{\mu}_x \sin(\mathbf{x}_5) - \boldsymbol{\mu}_y \cos(\mathbf{x}_5)}{[1 - \sin^2(\mathbf{x}_5)\boldsymbol{\mu}_x^2 + 2\boldsymbol{\mu}_x\boldsymbol{\mu}_y \sin(\mathbf{x}_5) \cos(\mathbf{x}_5) - \boldsymbol{\mu}_y^2 \cos^2(\mathbf{x}_5)]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\mathbf{x}_{3d} = \arcsin \left[\frac{\boldsymbol{\mu}_x \cos(\mathbf{x}_5) + \boldsymbol{\mu}_y \sin(\mathbf{x}_5)}{[1 - \sin^2(\mathbf{x}_5)\boldsymbol{\mu}_x^2 + 2\boldsymbol{\mu}_x\boldsymbol{\mu}_y \sin(\mathbf{x}_5) \cos(\mathbf{x}_5) - \boldsymbol{\mu}_y^2 \cos^2(\mathbf{x}_5)]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Consequentemente, a partir das leis de controle formuladas no procedimento passo a passo, o controle do **VANT** hexarrotor em malha fechada resulta em um sistema assintoticamente estável.

4.4.1 Análise de Distúrbios nas Medições para a Estabilidade do Sistema

Determinar a posição e a orientação é vital para a localização e a navegação de qualquer **VANT/VTOL**. Para este fim, um conjunto de sensores são necessários para estimar e alcançar a sua localização no espaço. Sensores como girômetros, inclinômetros, acelerômetros, magnetômetros e **GPS** são alguns do conjunto de dispositivos capazes de fornecer informações de grandezas físicas, que combinadas com as apropriadas técnicas de fusão de sensores fornecem valores estimados para as variáveis de localização (Oshman e Isakow, 1999; Earl e D'Andrea, 2004; Hall *et al.*, 2008; Yongliang *et al.*, 2008; Suh *et al.*, 2010; Edwan *et al.*, 2011; Barczyk e Lynch, n.d.). Porém, alguns sensores são sujeitos a distúrbios externos e podem produzir a propagação do erro devido à flutuação das medições ou à vibração do próprio do **VANT/VTOL**. Nesse propósito, o filtro de *Kalman* com suas variantes foram apresentados para tentar mitigar esses problemas (Kallapur e Anavatti, n.d.; Thrun *et al.*, 2006; Choukroun *et al.*, 2006; Yongliang *et al.*, 2008; Hall *et al.*, 2008; Meng *et al.*, n.d.; Suh *et al.*, 2010; Marina *et al.*, 2012). Além disso, para a melhora do desempenho, algumas aplicações combinam a visão computacional auxiliando a localização, o controle e a navegação (Altuğ *et al.*, 2005; Guenard *et al.*, 2008; Zhang *et al.*, 2010b; Dai, n.d.; Baik *et al.*, 2011; Zhang *et al.*, 2010a).

Em medições em tempo real, a relação das variações angulares fornecidas pelos girômetros são representados pelas variáveis $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ que correspondem aos componentes do vetor de velocidade angular ${}^h\Omega_x$, ${}^h\Omega_y$ e ${}^h\Omega_z$, respectivamente. Enquanto, os

ângulos de atitude $\{\phi, \theta, \psi\}$ são obtidos a partir da fusão de sensores. Em ambos os vetores, se consideradas as incertezas na determinação das medidas estimadas, estas podem ser modeladas como o valor exato com a adição de um viés desconhecido, que varia lentamente com característica limitada $\{\gamma\}$, valor relacionado ao vetor $\vec{\omega}_{\text{bias}}$ e mais um ruído branco gaussiano $\{\eta\}$, valor relacionado ao vetor $\vec{\omega}_{\text{noise}}$, definidos como:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_1 &= \tilde{\phi} = \phi + \gamma_\phi + \eta_\phi \\
\tilde{\mathbf{x}}_2 &= \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \delta_{\mathbf{p}} + \eta_{\mathbf{p}} \\
\tilde{\mathbf{x}}_3 &= \tilde{\theta} = \theta + \gamma_\theta + \eta_\theta \\
\tilde{\mathbf{x}}_4 &= \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \gamma_{\mathbf{q}} + \eta_{\mathbf{q}} \\
\tilde{\mathbf{x}}_5 &= \tilde{\psi} = \psi + \gamma_\psi + \eta_\psi \\
\tilde{\mathbf{x}}_6 &= \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \gamma_{\mathbf{r}} + \eta_{\mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

As representações, $\tilde{\mathbf{x}}_i$, com $i = 1, \dots, 6$, representam os valores estimados de \mathbf{x}_i .

Afim de avaliar a estabilidade do sistema de controle sob os efeitos das grandezas estimadas, o procedimento por backstepping robusto aos ruídos dos sensores é desenvolvido. Considere-se as equações (4.37) e (4.44), calculando sua derivada e substituindo resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2) &= -\left(\alpha_1 - \frac{2\alpha_1\gamma_\phi}{\|\mathbf{z}_1\|}\right)\mathbf{z}_1^2 - \\
&- \left[\alpha_2 + \frac{\alpha_2\gamma_{\mathbf{p}} + \alpha_1\alpha_2\gamma_\phi - \gamma_\phi - \mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{q}}\mathbf{x}_6}{\|\mathbf{z}_2\|} + \right. \\
&+ \left. \frac{-\mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{q}}\gamma_{\mathbf{r}} - \mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_1k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{p}} - \alpha_1\gamma_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{z}_2\|}\right]\mathbf{z}_2^2 + \\
&+ \gamma_\phi\gamma_{\mathbf{p}} + (\gamma_{\mathbf{p}} + \alpha_1\gamma_\phi)[\mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{q}}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{q}}\gamma_{\mathbf{r}} + \\
&+ \mathbf{a}_1\gamma_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{p}} + \alpha_1\gamma_{\mathbf{p}}],
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Pode-se observar, que o sinal da equação (4.45) não é claramente definido e depende dos distúrbios das medições, como também de algumas variáveis de estado e das variáveis de erro de rastreamento $\tilde{\mathbf{z}}_i$, estimados. O objetivo com o procedimento é calcular os limites para os ganhos do controlador e garantir o valor definido negativo para a função $\dot{\mathbf{V}}$, ou pelo menos dentro de uma região de convergência

limitada, para o qual o sistema é assintoticamente estável. Nesse sentido, avalia-se o procedimento desenvolvido para as equações (4.39) e (4.40) dos passos (iv) e (vi), resultando em,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4) = & - \left(\alpha_3 - \frac{2\alpha_3\gamma_\theta}{\|\mathbf{z}_3\|} \right) \mathbf{z}_3^2 - \\
& - \left[\alpha_4 + \frac{\alpha_4\gamma_{\mathbf{q}} + \alpha_3\alpha_4\gamma_\theta - \gamma_\theta - \mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{p}}\mathbf{x}_6}{\|\mathbf{z}_4\|} + \right. \\
& + \left. \frac{-\mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{r}} - \mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{q}} - \alpha_3\gamma_{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{z}_4\|} \right] \mathbf{z}_4^2 + \\
& + \gamma_\theta\gamma_{\mathbf{q}} + (\gamma_{\mathbf{q}} + \alpha_3\gamma_\theta)[\mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{p}}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{r}} + \\
& + \mathbf{a}_2\gamma_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{q}} + \alpha_3\gamma_{\mathbf{q}}], \tag{4.46}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{z}}_5, \tilde{\mathbf{z}}_6) = & - \left(\alpha_5 - \frac{2\alpha_5\gamma_\psi}{\|\mathbf{z}_5\|} \right) \mathbf{z}_5^2 - \\
& - \left[\alpha_6 + \frac{\alpha_6\gamma_{\mathbf{r}} + \alpha_5\alpha_6\gamma_\psi - \gamma_\psi - \mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{q}}\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{z}_6\|} + \right. \\
& + \left. \frac{-\mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{q}} - \mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{p}}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{r}} - \alpha_5\gamma_{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{z}_6\|} \right] \mathbf{z}_6^2 + \\
& + \gamma_\psi\gamma_{\mathbf{r}} + (\gamma_{\mathbf{r}} + \alpha_5\gamma_\psi)[\mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{q}}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{p}}\gamma_{\mathbf{q}} + \\
& + \mathbf{a}_3\gamma_{\mathbf{p}}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_{\mathbf{r}}\gamma_{\mathbf{r}} + \alpha_5\gamma_{\mathbf{r}}]. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Dada a similaridade das últimas equações, a análise dos efeitos causados pelos distúrbios nas medidas realizadas, na função candidata a Lyapunov, geram resultados idênticos. Assim, na subseção seguinte são determinadas as condições necessárias e suficientes para estabilidade assintótica e os limites para os ganhos de controle.

4.4.2 Estabilidade Assintótica Global Uniforme para o VANT Hexarrotor

Em geral, calcular os limites dos ganhos do controlador da correspondente função a Lyapunov, que leve condição especificada para estabilidade uniforme, significa alcançar a convergência dentro de um conjunto, cuja região é limitada. Para sistemas invariantes no tempo, a principal ferramenta de análise é o teorema de invariância de LaSalle e para sistemas variantes no tempo, uma ferramenta mais refinada foi

desenvolvido por LaSalle e Yoshizawa (Krstić *et al.*, 1995). O conceito de estabilidade assintótica prática, na literatura, é mais apropriado para lidar com problemas concretos do mundo real (Lakshmikantham *et al.*, 1990). No entanto, sobre certas premissas, é possível estudar a estabilidade assintótica prática de um sistema não linear com ferramentas muito semelhantes a estabilidade de Lyapunov. Considere o sistema não linear,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (4.48)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua por partes em t e localmente Lipschitz em \mathbf{x} .

Lema 4.2. (Chaillet e Loría, 2008) *Seja δ uma constante não negativa e \mathbf{X} um subconjunto de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_\delta$. Suponha que existem: uma função $\mathbf{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^1 ; funções $\underline{\alpha}_\delta$ e $\bar{\alpha}_\delta$ de classe \mathcal{K}_∞ ; uma constante $\mathbf{k} > 0$, e uma função $\mathbf{c} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\underline{\alpha}_\delta(|\mathbf{x}|) \leq \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \leq \bar{\alpha}_\delta(|\mathbf{x}|)$ e, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X} \Rightarrow \dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}(t)) \leq -\mathbf{k}\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{c}(|\mathbf{x}_0|)$, onde $\mathbf{x}(t)$ denota $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$. Então, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{X}$, temos que*

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)|_\delta &\leq \underline{\alpha}_\delta^{-1}(\bar{\alpha}_\delta(\delta) + \frac{\mathbf{c}(|\mathbf{x}_0|)}{k}) + \\ &+ \underline{\alpha}_\delta^{-1}(\bar{\alpha}_\delta(|\mathbf{x}_0|))e^{-\mathbf{k}(t-t_0)} + \frac{\mathbf{c}(|\mathbf{x}_0|)}{\mathbf{k}}, \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Sem passar por mais detalhes sobre a estabilidade assintótica prática, e afim de simplificar os cálculos, aplica-se o Lema 2 a uma função candidata a Lyapunov do tipo, $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, encontra-se o limite superior: $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \leq -\varsigma_1 \mathbf{z}_1^2 - \varsigma_2 \mathbf{z}_2^2 + \mathbf{c} \leq -\min\{\varsigma_1, \varsigma_2\}(\mathbf{z}_1^2 + \mathbf{z}_2^2) + \mathbf{c} \leq -\varsigma \mathbf{V} + \mathbf{c}$, com constantes $\mathbf{c} > 0$ e $\varsigma > 0$, assegurando que a função $\dot{\mathbf{V}}$ seja definida negativa ou esteja pelo menos dentro de uma bola ao redor da origem. Isto satisfaz a condição de estabilidade assintótica prática. Suponha, em seguida, que o erro seja maior do que a constante desejada, $\epsilon : \max(\|\mathbf{z}_1\|, \|\mathbf{z}_2\|) \geq \epsilon$. Para a seleção dos limites dos ganhos e para obter a estabilidade robusta da estrutura hexarrotor sobre a altitude e atitude, algumas transformações algébricas são necessárias. Considere a equação (4.45), com ganhos arbitrários α_1 e α_2 , e, afim de simplificar procedimentos computacionais, seja definido $\alpha_2 = \alpha_1$. O tamanho da bola e os valores máximos das variáveis do erro podem ser encontradas para diferentes casos. Primeiro, considere as variáveis dos erros sendo, $\|\mathbf{z}_1\| \geq \epsilon_\phi$ e $\|\mathbf{z}_2\| \geq \epsilon_p$. Neste caso, a função $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2)$ atinge o valor mínimo quando $\mathbf{z}_1 = \epsilon_\phi$

e $\mathbf{z}_2 = \epsilon_p$. Assim, a desigualdade de Cauchy-Schwarz na equação (4.45), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2) = & - \left(\alpha_1 - \frac{2\alpha_1\gamma_\phi}{\epsilon_\phi} \right) \mathbf{z}_1^2 - \\
 & - \frac{1}{2} \left[\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2\gamma_\phi - \gamma_\phi - \mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6}{\epsilon_p} + \right. \\
 & \left. + \frac{-\mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r - \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_1k_r\gamma_p}{\epsilon_p} \right] \mathbf{z}_2^2 - \\
 & - \frac{1}{2} \left[\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2\gamma_\phi - \gamma_\phi - \mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6}{\epsilon_p} + \right. \\
 & \left. + \frac{-\mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r - \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_1k_r\gamma_p}{\epsilon_p} \right] \epsilon_p^2 + \\
 & + \gamma_\phi\gamma_p + (\gamma_p + \alpha_1\gamma_\phi) [\mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r + \\
 & + \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1k_r\gamma_p + \alpha_1\gamma_p]. \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

Afim de satisfazer a condição dada pelo Lemma 1 e seja definida negativa para os termos \mathbf{z}_1^2 e \mathbf{z}_2^2 , a definição dos termos adicionais deve ser comprovada. Esta condição suficiente é satisfeita pelas seguintes relações:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{2\alpha_1\gamma_\phi}{\epsilon_\phi} \geq 0 \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2\gamma_\phi - \gamma_\phi - \mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6 - \mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r - \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_1k_r\gamma_p}{\epsilon_p} \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left[\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2\gamma_\phi - \gamma_\phi - \mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6 - \mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r - \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_1k_r\gamma_p}{\epsilon_p} \right] \epsilon_p^2 \geq \\ \gamma_\phi\gamma_p + (\gamma_p + \alpha_1\gamma_\phi) [\mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r + \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1k_r\gamma_p + \alpha_1\gamma_p]. \end{cases} \tag{4.50}$$

Das desigualdades, que independentemente do valor α_1 , o erro mínimo ϵ_ϕ deve satisfazer: $\epsilon_\phi \geq 2\gamma_\phi$. Assim, o erro de rastreamento \mathbf{z}_1 satisfaz: $\|\mathbf{z}_1\| > \gamma_\phi$. Este resultado poderia ter sido previsto ou esperado, pois γ_ϕ é somado diretamente a \mathbf{x}_1 e não há forma de rejeitar ou atenuar o erro de medição desde que a medição torna-se indistinguível no próprio estado. A partir desta operação é possível calcular o valor do ganho requerido para α_1 :

$$\alpha_1 \geq \max \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\epsilon_\phi}{2\gamma_\phi} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_\phi^2}{4\gamma_\phi^2} + \frac{\gamma_\phi + \mathbf{a}_1\gamma_q\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1\gamma_q\gamma_r + \mathbf{a}_1\gamma_r\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1k_r\gamma_p}{\gamma_\phi}} \\ -\frac{\mathbf{c}_1}{2\gamma_\phi(\epsilon_p - 2\gamma_p)} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{c}_1}{2\gamma_\phi(\epsilon_p - 2\gamma_p)} \right)^2 + \frac{\mathbf{c}_2}{\gamma_\phi(\epsilon_p - 2\gamma_p)}} \end{array} \right. \tag{4.51}$$

sabendo que,

$$\mathbf{c}_1 = \epsilon_p^2 - 2[\gamma_p^2 + \mathbf{a}_1\gamma_\phi\gamma_q\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1\gamma_\phi\gamma_q\gamma_r + \mathbf{a}_1\gamma_\phi\gamma_r\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1k_r\gamma_\phi\gamma_p],$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2 = & \epsilon_p \gamma_\phi + \mathbf{a}_1 \epsilon_p \gamma_q \mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1 \epsilon_p \gamma_q \gamma_r + \mathbf{a}_1 \epsilon_p \gamma_r \mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1 k_r \epsilon_p \gamma_p + \\ & + 2[\gamma_\phi \gamma_p + \mathbf{a}_1 \gamma_p \gamma_q \mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_1 \gamma_p \gamma_q \gamma_r + \mathbf{a}_1 \gamma_p \gamma_r \mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_1 k_r \gamma_p^2], \end{aligned}$$

onde a expressão $\max(\cdot)$ representa o valor absoluto máximo estimado de seus argumentos. $\alpha_2 = \alpha_1$, com $\epsilon_\phi \geq 2\gamma_\phi$, requer a avaliação numérica das restrições especificadas por (4.51), que dependem dos parâmetros do sistema, dos valores estimados dos distúrbios γ_* , do erro absoluto máximo estimado ϵ_* e dos valores das velocidades angulares absolutas máximas estimadas.

O apêndice B, apresenta os desenvolvimentos para os demais ganhos de controle com base no procedimento prévio. Reforçando ao mesmo tempo, todas as restrições sobre os ganhos de controle dada pelas equações (4.51), (B.3) e (B.6), com ϵ , apropriadamente escolhido para cobrir a parcela desejada do espaço de estados, finalmente, resulta em estabilidade assintótica prática para o sistema em malha fechada. Assim, o limites superiores do erros \mathbf{z}_i , com $i = 1, \dots, 6$ permanecem limitados em regime permanente.

4.4.3 Simulações e Resultados Experimentais

Para controlar a estrutura hexarrotor e verificar a eficiência do algoritmo, inicialmente foi implementado um simulador computacional a partir do modelo matemático. Em seguida, o controlador proposto foi simulado, obtendo-se resultados para certas condições de rastreamento de trajetória. Para este efeito, os parâmetros do sistema, são listados na tabela 4.2. Para a eficiência das leis de controle, o método de Runge-Kutta com passo fixo foi executada. A restrição do controlador se limita à taxa de atualização do sinal **PWM**, fixado por hardware em 20ms, valor inerente em atuadores com acionamentos de potência para este tipo de motores brushless. A taxa de atualização do estimador de atitude é aproximadamente a 10ms, restrição que não corresponde somente à obtenção das medições, como também a executar o procedimento descrito em (Sanca *et al.*, 2011). Por este motivo, o controlador por backstepping foi implementado com restrição de passo fixo e validado o desempenho com testes experimentais.

Inicialmente, os parâmetros do controlador em simulação são fixados como: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_6 = 1$, $\alpha_7 = 100$ e $\alpha_8 \dots = \alpha_{12} = 1$.

A resposta ao degrau com variáveis de referência $\phi_d = \theta_d = 10$ graus, $\psi_d = 80$ graus e $z_d = 10$ m são gerados por uma função de transferência definida por $1/(s+1)^3$, com condições iniciais nulas, onde s denota a variável de *Laplace*. O objetivo desta função é possibilitar uma entrada suave para os sinais de controle do sistema. As figuras 4.5 e 4.6 mostram a resposta ao degrau e os erros de rastreamento para as variáveis de referência.

Tabela 4.2: Principais parâmetros do VANT hexarrotor.

Symbol	unit
m	4.575kg
g	9.806m/s ²
l	0.325m
ρ	1.293kg/m ³
d	1.6e ⁻⁶ Nm s ²
m_1, m_2	2.144, 0.477kg
r_1, r_2, a	0.1, 0.1, 0.16m
k_t	4.9e ⁻³ N s/m
k_r	9.5e ⁻⁴ Nm s/rad
C_T	0.0087
C_Q	0.0137
R	0.1524m and $A = \pi R^2$
V_g	14.8V
R_m	0.036 Ω
J_m	1.6e ⁻⁵ kg m ²
J_r	1.3e ⁻³ kg m ²
k_m	1.17e - 2kg m/A
V_{iair}, Ω_{iair}	0.1m/s, 0.01rad/s

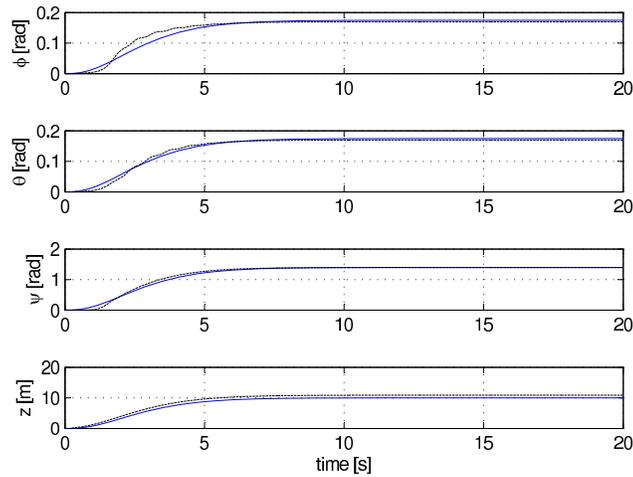


Figura 4.5: Resposta ao degrau com sinais de referência $\phi_d = \theta_d = 10\pi/180$ radianos, $\psi_d = 80\pi/180$ radianos e $z_d = 10$ m. O controlador por backstepping estabiliza o sistema e rastreia os ângulos de rolagem, arfagem, guinada e altitude com erro de regime nulo.

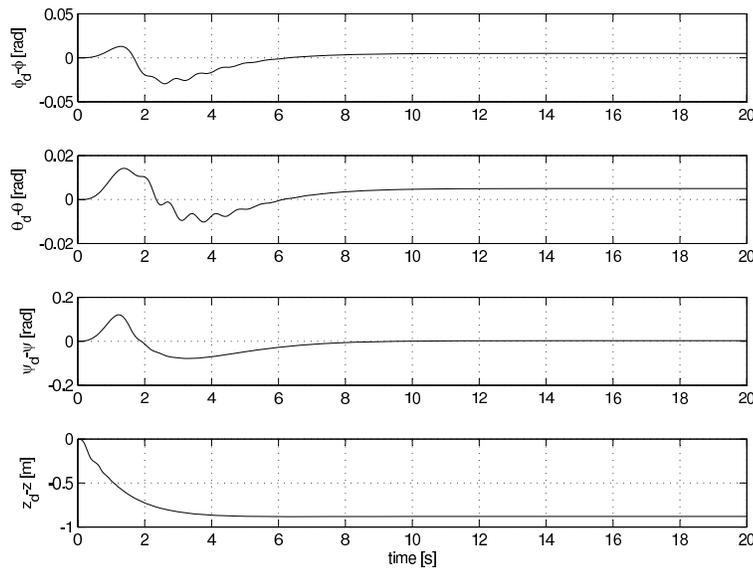


Figura 4.6: Erros de rastreamento de altitude e dos ângulos atitude.

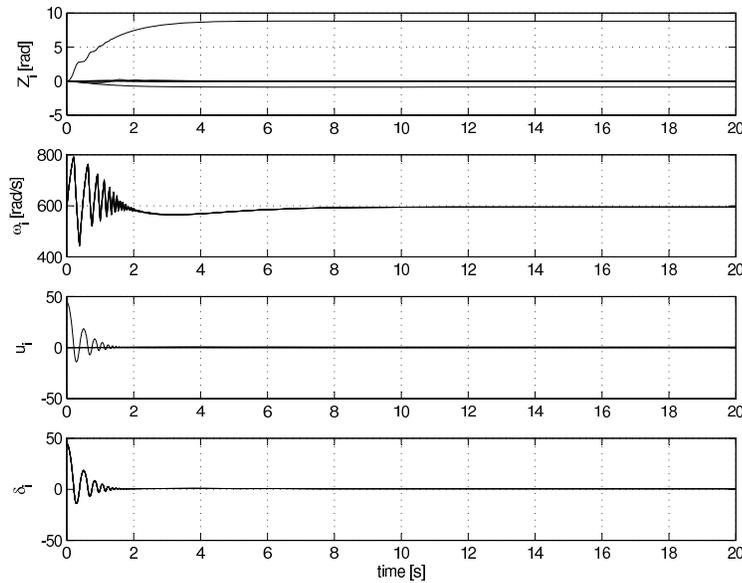


Figura 4.7: Erros de rastreamento das variáveis virtuais $z_{1,2,\dots,8}$; as velocidades angulares dos rotores $\omega_{1,2,\dots,6}$ [rad/seg]; sinais de controle $u_{1,2,3,4}$; e as larguras de pulso, $\delta_{1,2,\dots,6}$, dos sinais PWM.

A figura 4.7 mostra os erros de rastreamento \mathbf{z}_i , para simulações realizadas de aproximadamente 20 segundos. Os resultados ilustram o comportamento assintótico estável para o sistema quando é aplicado o controlador por backstepping. Pode-se observar o bom desempenho com sinais de controle, \mathbf{u}_i , realizáveis por hardware.

Finalmente, as figuras 4.8, 4.9 e 4.10 ilustram o controle de movimento vertical ao longo do eixo z , os erros de seguimento de trajetória e os sinais aplicados aos rotores. Os valores adotados estão de acordo com as equações (4.51), (B.3) e (B.6), sendo a resposta limitada e assintoticamente estável.

4.5 Sumário

Neste capítulo, foi apresentado o desenvolvimento de controladores para o **VANT** hexarrotor, destacando a técnica por backstepping e uma aplicação robusta dos conceitos para sistemas **GUPAS**. Os controladores de atitude/altitude foram obtidos para alcançar a estabilidade assintótica prática, de acordo com algumas suposições que tratam da convergência dentro de uma região limitada, centralizada na origem. Por fim, simulações numéricas e resultados experimentais mostraram o desempenho para o controlador proposto.

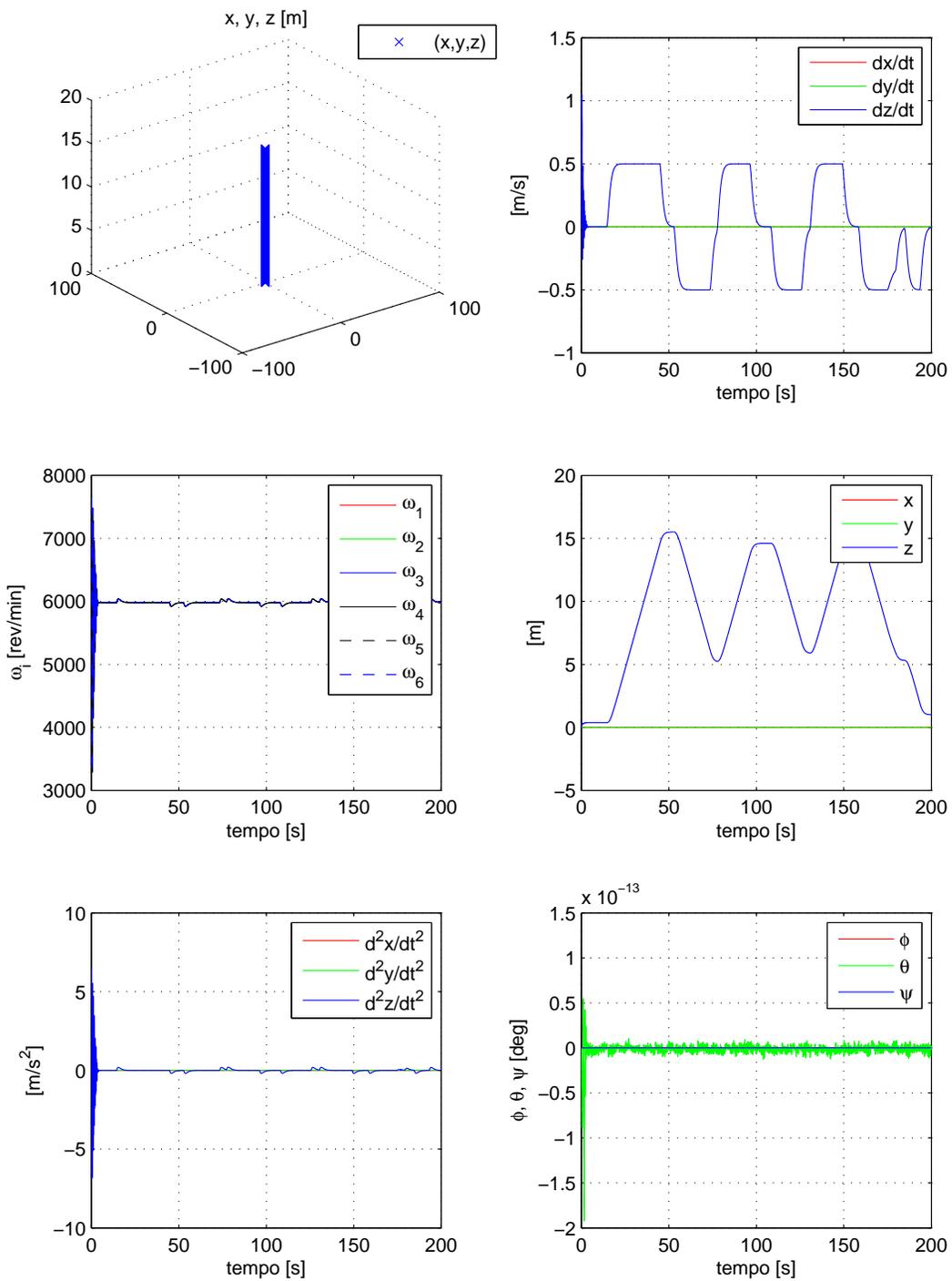


Figura 4.8: Resposta do hexarrotor com controle backstepping robusto, para movimentos verticais em voo pairado ao longo do eixo z .

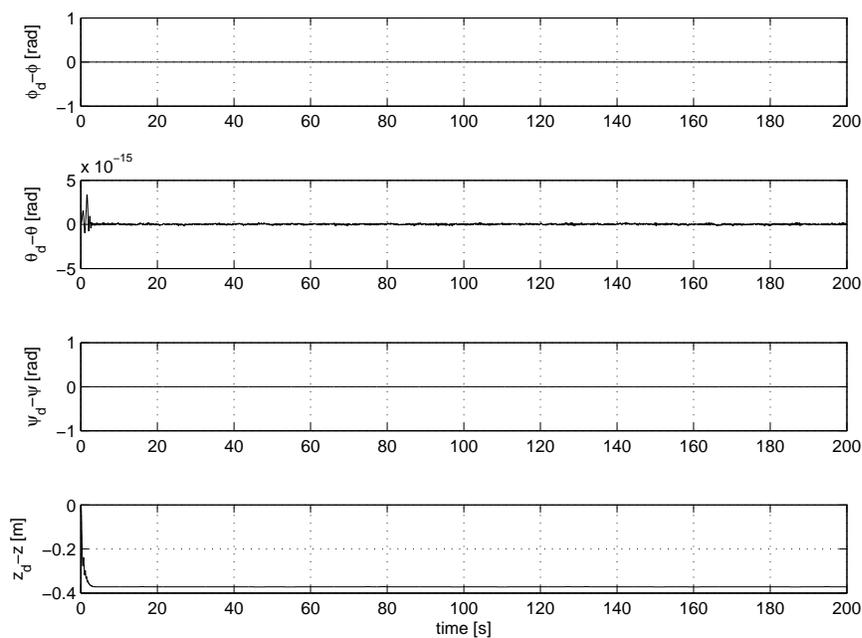


Figura 4.9: Resposta do erro de seguimento para atitude/altitude.

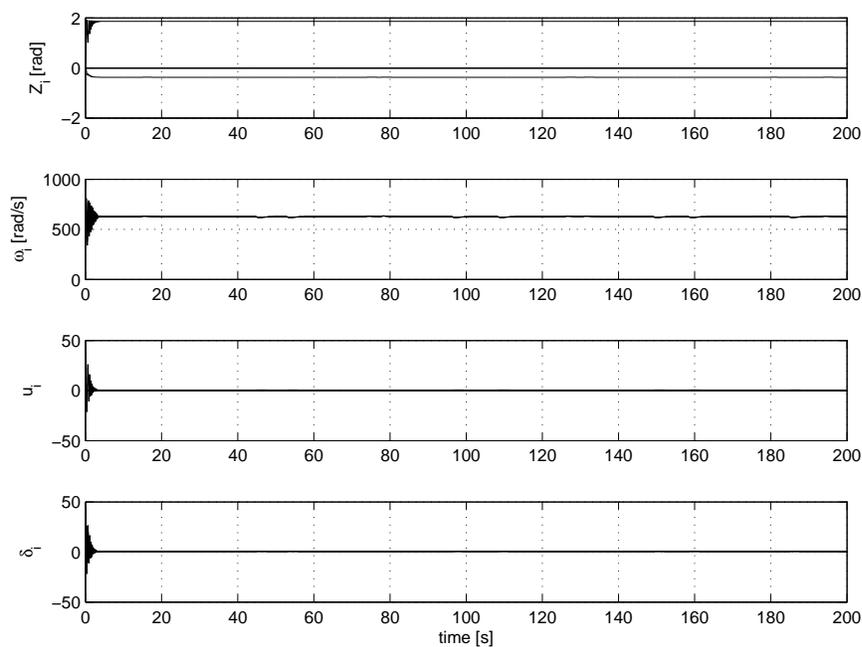


Figura 4.10: Sinais de controle aplicados ao hexarotor.

Capítulo 5

Conclusão

NESTA Tese foi proposto um controlador de atitude e posição com base na técnica não linear por backstepping, robusto a ruídos dos sensores e aplicado a um VANT hexarrotor. Os controladores de atitude e altitude foram derivados para alcançar a estabilidade assintótica prática, considerando o estimador de atitude com sensores de medida inercial limitados. A técnica de análise por Lyapunov foi usado para provar a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada do sistema, determinando os limites para os ganhos de controle e garantindo limites sobre a dinâmica, com erros de rastreamento nulos na presença de distúrbios de medição.

5.1 Considerações e Contribuições

Na literatura, alguns trabalhos são relacionados com a estrutura hexarrotor. Porém, neste documento as contribuições são colocadas de acordo às publicações realizadas pelo autor.

1. O desenvolvimento do modelo dinâmico do VANT quadrirrotor, incluindo os efeitos das não linearidades de entrada como a zona morta e saturação foi apresentado em (Sanca *et al.*, 2008; Guimarães *et al.*, 2012a; Guimarães *et al.*, 2012b) e o desenvolvimento da modelagem para uma estrutura hexarrotor em (Sanca *et al.*, 2010c; Sanca *et al.*, 2010e), incluindo os efeitos aerodinâmicos em (Sanca *et al.*, 2010d);
2. Um esquema de estimação de atitude em tempo real, com base no FKE por quatérnios foi apresentado em (Sanca *et al.*, 2011; Sanca *et al.*, 2010d). O estimador foi desenvolvido para o controle e estabilização de atitude do hexarrotor. O projeto e construção de um VANT hexarrotor experimental foi apresentada em (Sanca *et al.*, 2010b). O sistema experimental integra o desempenho do consumo de bateria, proporcionando estratégias de controle mais

- eficientes em (Schildt *et al.*, 2012). Para o trabalho futuro, se sugere desenvolver um estudo comportamental em atividades *outdoor*, como a autonomia de voo e o controle do rastreamento robusto para o **VANT** hexarrotor frente a perturbações externas, que são inerentes em atividades de supervisão aérea.
3. Um algoritmo de controle por backstepping foi desenvolvido para estabilizar a atitude e a altitude do sistema, com isso foi possível acionar os sinais de controle e conduzir o **VANT** hexarrotor a uma trajetória desejada de posição e orientação em (Sanca *et al.*, 2010c; Sanca *et al.*, 2010e). A estrutura experimental foi equipada com uma **IMU**/sonar, que devidamente instrumentadas fornecem as medidas de atitude e a altitude (Sanca *et al.*, 2011). O controlador de atitude/altitude, limitado, foi derivado usando os conceitos para sistemas **GUPAS**, robusto a distúrbios nos sensores. A estabilidade assintótica prática que trata da convergência do sistema em malha fechada dentro de uma região limitada não nula, centralizada na origem é abordada com algumas considerações. A análise de estabilidade por Lyapunov foi usada para provar a estabilidade assintótica, calcular o ganhos de controle e o erro de rastreamento desejado em regime permanente.
 4. Algumas das aplicações com a estrutura **VANT** hexarrotor foram apresentadas em (Laura *et al.*, 2011; Laura *et al.*, 2010). Os trabalhos descrevem alguns procedimentos preliminares para o desempenho das tarefas de monitoramento e inspeção em sistemas de tanques e dutos, o desenvolvimento do **VANT** hexarrotor, o controle de atitude e a altitude, a estimação da atitude usando os conceitos de fusão de sensores, contendo uma **IMU**/sonar. Sugere-se como trabalhos futuros, para a estimação da orientação e posição, a integração de uma unidade **GPS** e as informações vindas de imagens obtidas com uma câmera monocular. Para esta formulação, está em andamento o desenvolvimento de um simulador gráfico **3D**, dinâmico implementado para o veículo dentro de um ambiente a ser inspecionado. Os algoritmos foram implementados para o controle local do veículo e a extração de características de uma sequência de imagens possibilitam a sua localização.
 5. Finalmente, em (Laura *et al.*, 2012), um sistema para monitoramento de plantações de cana-de-açúcar através de um pequeno **VANT**, especificamente um helicóptero multirrotor, devidamente instrumentado para a captura e o envio das imagens a uma estação base, com o objetivo de uma análise mais aprofundada foi apresentado como resultados preliminares. A sugestão como trabalho futuro, usando a análise por imagens, seria realizar o estudo do processos criteriosos para identificação de ecossistemas, como por exemplo: determinação das anomalias nas atividades fotossintéticas, de ocorrências de déficit hídrico, estresse nutricional e os ataques por pragas.

Referências Bibliográficas

- Alarcón, J. R. C., H. R. Cortés e E. V. Vivas (2009). Extended kalman filter tuning in attitude estimation from inertial and magnetic field measurements. Em: *6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*. pp. 1–6.
- Alexis, K., G. Nikolakopoulos e A. P. Tzes (2010). Design and experimental verification of a constrained finite time optimal control scheme for the attitude control of a quadrotor helicopter subject to wind gusts. Em: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage*. pp. 1636–1641.
- Altuğ, E. e C. Taylor (2004). Vision-based pose estimation and control of a model helicopter. Em: *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics*. pp. 316–321.
- Altuğ, E., J. P. Ostrowski e C. J. Taylor (2003). Quadrotor control using dual camera visual feedback. Em: *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan*. Vol. 3. pp. 4294–4299.
- Altuğ, E., J. P. Ostrowski e C. J. Taylor (2005). Control of a quadrotor helicopter using dual camera visual feedback. *The International Journal of Robotics Research* **24**(5), 329–341.
- Altuğ, E., J. P. Ostrowski e R. Mahony (2002). Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. Em: *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Washington, DC*. pp. 72–77.
- Azinhira, J. R. e A. Moutinho (2008). Hover control of an UAV with backstepping design including input saturations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **16**(3), 517–526.
- Bae, J. e Y. Kim (2010). Nonlinear estimation for spacecraft attitude using decentralized unscented information filter. Em: *International Conference on Control, Automation and Systems in Kintex, Gyeonggi, Korea*. pp. 1562–1566.
- Baik, K., J. Shin, S. Ji, W. Shon e S. Park (2011). A vision system for UAV position control. Em: *IEEE Aerospace Conference*. Vol. 1. pp. 1–6.

- Barczyk, M. e A. F. Lynch (n.d.). Invariant extended kalman filter design for a magnetometer-plus-GPS aided inertial navigation system. Em: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*.
- Bethke, B., M. Valenti e J. P. How (2008). UAV task assignment: An experimental demonstration with integrated health monitoring. *IEEE Robotics & Automation Magazine* **15**(1), 39–44.
- Bouabdallah, S. e R. Siegwart (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. Em: *Proceedings of 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain*. pp. 2247–2252.
- Bouabdallah, S., M. Becker e R. Siegwart (2007). Autonomous miniature flying robots: Coming soon! - research, development, and results. *IEEE Robotics & Automation Magazine* **14**(3), 88–98.
- Bouabdallah, S., P. Murrieri e R. Siegwart (2004). Design and control of an indoor micro quadrotor. Em: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation, New Orleans, LA*. pp. 4393–4398.
- Bramwell, A. R. S., G. Done e D. Balmford (2001). *Bramwell's helicopter dynamics*. Butterworth-Heinemann.
- Brown, A. K. (2005). GPS/INS uses low-cost MEMS IMU. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine* **20**(9), 3–10.
- Chaillet, A. e A. Loría (2008). Uniform semiglobal practical asymptotic stability for non-autonomous cascaded systems and applications. *Automatica* **44**(2), 337–347.
- Choukroun, D., I. Y. Bar-Itzhack e Y. Oshman (2006). Novel quaternion kalman filter. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems* **42**(1), 174–190.
- Dai, Y. Liu; Q. (n.d.). Vision aided unmanned aerial vehicle autonomy: An overview. Em: *3rd International Congress on Image and Signal Processing (CISP)*.
- Dierks, T. e S. Jagannathan (2010). Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* **21**(1), 50–66.
- Draganfly Innovation Inc (2010). Draganflyer x6. Technical report. <http://www.draganfly.com/uav-helicopter/draganflyer-x6>.
- Dzul, A., T. Hamel e R. Lozano (2002). Modeling and nonlinear control for a coaxial helicopter. Em: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 6. pp. 1–6.

- Earl, M. G. e R. D'Andrea (2004). Real-time attitude estimation techniques applied to a four rotor helicopter. Em: *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas*. Vol. 4. pp. 3956–3961.
- Edwan, E., S. Knedlik e O. Loffeld (2011). Constrained angular motion estimation in a gyro-free IMU. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems* **47**(1), 596–610.
- Escareño, J., S. Salazar-Cruz e R. Lozano (2006). Embedded control of a four-rotor UAV. Em: *Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA*. pp. 3936–3941.
- Euston, M., P. Coote, R. Mahony, J. Kim e T. Hamel (2008). A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing UAV. Em: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Nice, France*. pp. 340–345.
- Fan, P., X. Wang e K. Cai (2010). Design and control of a tri-rotor aircraft. Em: *8th IEEE International Conference on Control and Automation, Xiamen, China*. number 1972-1977.
- Fang, H., C. Xia, Z. Chen e X. Wei (2007). Position servo control of brushless DC motor based on the second discrete filter. Em: *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, Sanya, China*. pp. 1838–1842.
- Fu, K. S., R. C. Gonzalez e C. S. G. Lee (1987). *Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*. McGraw-Hill, Inc.
- Guenard, N., T. Hamel e R. Mahony (2008). A practical visual servo control for an unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Robotics* **24**(2), 331–340.
- Guenard, N., T. Hamel e V. Moreau (2005). Dynamic modeling and intuitive control strategy for an “x4-flyer”. Em: *2005 International Conference on Control and Automation (ICCA2005), Budapest, Hungary*. pp. 141–146.
- Guimarães, J. P. F., A. S. Sanca, M. S. Deus, T. L. Laura, A. N. Schildt, A. A. D. Medeiros e P. J. Alsina (2012a). Estratégia de estabilização para um helicóptero quadri-rotor autônomo. in: *Xix congresso brasileiro de automática*. Em: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA, CG/PB*. pp. 4459–4466.
- Guimarães, J. P. F., T. L. Laura, A. S. Sanca, A. N. Schildt, M. S. Deus, P. J. Alsina, A. T. Da-Silva e A. A. D. Medeiros (2012b). Fully autonomous quadrotor: A testbed platform for aerial robotics tasks. Em: *IEEE Latin American Robotics Symposium - LARS*. pp. 68–73.

- Hall, J., N. B. Knoebel e T. W. McLain (2008). Quaternion attitude estimation for miniature air vehicles using a multiplicative extended kalman filter. Em: *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*. pp. 1230–1237.
- He, R., S. Prentice e N. Roy (2008). Planning in information space for a quadrotor helicopter in a gps-denied environment. Em: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA2008)*. pp. 1814–1820.
- Huang, M., B. Xian, C. Diao, K. Yang e Y. Feng (2010). Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping. Em: *American Control Conference*. pp. 2076–2081.
- Kallapur, A. G. e S. G. Anavatti (n.d.). UAV linear and nonlinear estimation using extended kalman filter. Em: *International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce (CIMCA-IAWTIC)*.
- Khalil, Hassan K. (1992). *Nonlinear systems*. Macmillan Publishing Company.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos e P. Kokotović (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons.
- Kuipers., Jack B. (1999). *Quaternions and rotation sequences*. Princeton University Press.
- Lakshmikantham, V., S. Leela e A. A. Martynyuk (1990). *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific.
- Laura, T. L., A. S. Sanca e P. J. Alsina ans A. A. D. Medeiros (2010). Posicionamento de um veículo aéreo não tripulado: Uma alternativa para detecção de corrosões em dutos. Em: *Anais do Rio Oil & Gas, Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis, Rio de Janeiro*. pp. 1–9.
- Laura, T. L., A. S. Sanca, J. P. F. Guimarães, M. S. Deus, A. N. Schildt, P. J. Alsina e A. A. D. Medeiros (2012). Monitoring of sugar cane plantations by a micro-unmanned aerial vehicle. Em: *Proceedings of the First International Conference on Robotics, Associated High-Technologies and Equipement for Agriculture - RHEA, Pisa, Italy*. pp. 1–6.
- Laura, T. L., P. J. Alsina, A. A. D. Medeiros, J. P. F. Guimarães e A. S. Sanca (2011). Posicionamento de um veículo aéreo não tripulado para detecção de corrosões em dutos. *Petro & Química* **338**, 38–43.
- Leishman, J. G. e S. Ananthan (2006). Aerodynamic optimization of a coaxial prop-rotor. Em: *62th Annual Forum and Technology Display of the American Helicopter Society International, Phoenix, AZ, May 9-11*. pp. 1–23.

- Lim, J. e D. Hong (2010). Cost reference particle filtering approach to high-bandwidth tilt estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **57**(11), 3830–3839.
- Ludington, B., E. Johnson e G. Vachtsevanos (2006). Augmenting UAV autonomy. *IEEE Robotics & Automation Magazine* **13**(3), 63–71.
- Madani, T. e A. Benallegue (2006a). Backstepping control for a quadrotor helicopter. Em: *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China*. pp. 3255–3260.
- Madani, T. e A. Benallegue (2006b). Backstepping sliding mode control applied to a miniature quadrotor flying robot. Em: *32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*. pp. 700–705.
- Madani, Tarek e Abdelaziz Benallegue (2007). Backstepping control with exact 2-sliding mode estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle. Em: *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego, CA, USA*. pp. 141–146.
- Mahony, R., V. Kumar e P. Corke (2012). Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation and control of a quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine* **19**(3), 20–32.
- Marina, H. G., F. J. Pereda e J. M. Giron-Sierra and F. Espinosa (2012). UAV attitude estimation using unscented kalman filter and TRIAD. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **59**(11), 4465–4474.
- McKerrow, P. (2004). Modelling the draganflyer four-rotor helicopter. Em: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation, New Orleans, LA*. pp. 3596–3601.
- Mellinger, D., N. Michael, M. Shomin e V. R. Kumar (2011). Recent advances in quadrotor capabilities. Em: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Shanghai*. pp. 9–13.
- Meng, L., L. Li e S. M. Veres (n.d.). Aerodynamic parameter estimation of an unmanned aerial vehicle based on extended kalman filter and its higher order approach. Em: *2nd International Conference on Advanced Computer Control (ICACC)*.
- Microdrones GmbH (2007). Technical information md4-200. Technical report. <http://www.microdrones.com/>.
- Neto, A. A., D. G. Macharet, V. C. S. Campos e M. F. M. Campos (2009). Adaptive complementary filtering algorithm for mobile robot localization. *Journal of the Brazilian Computer Society* **15**(3), 19–31.

- Oshman, Y. e M. Isakow (1999). Mini-UAV altitude estimation using an inertially stabilized payload. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **35**(4), 1191–1203.
- Park, J., D. Lee e H. J. Kim (2012). Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *IEEE Robotics & Automation Magazine* **19**(3), 33–45.
- Park, J. e C. Choi (1997). Dynamical anti-reset windup method for saturating control systems with multiple controllers and multiloop configuration. Em: *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control, San Diego, California, USA*. pp. 1960–1965.
- Parrot SA. (2012). Ar.drone 2.0. Technical report. <http://ardrone2.parrot.com/ardrone-2/specifications>.
- Pastor, E., J. Lopez e P. Royo (2007). UAV payload and mission control hardware/software architecture. *IEEE A&E Systems Magazine* pp. 3–8.
- Perrin, S., E. Duflos, P. Vanheeghe e A. Bibaut (2004). Multisensor fusion in the frame of evidence theory for landmines detection. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C: Application and Reviews* **34**(4), 485–498.
- Pollini, L e A. Metrangolo (2008). Simulation and robust backstepping control of a quadrotor aircraft. Em: *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii*. number AIAA 2008-6363. pp. 1–18.
- Raffo, G. V., M. G. Ortega e F. R. Rubio (2008). Backstepping/nonlinear H_∞ control for path tracking of a quadrotor unmanned aerial vehicle. Em: *American Control Conference*. pp. 3356–3361.
- Romero, H., S. Salazar, A. Sanchez, P. Castillo e R. Lozano (2007). Modelling and real-time control stabilization of a new VTOL aircraft with eight rotors. Em: *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. pp. 147–152.
- Salem, T. e T. A. Haskew (1995). Simulation of the brushless DC machine. Em: *27th Southeastern Symposium on System Theory*. IEEE Computer Society. pp. 18–22.
- Sanca, A. S., J. P. F. Guimarães, J. J. F. Cerqueira e P. J. Alsina (2010a). Hexarotor design project: Modeling and energy management for outdoor aerial robot. Em: *VI National Congress of Mechanical Engineering, Campina Grande, PB, Brazil*. pp. 1–9.

- Sanca, A. S., J. P. F. Guimarães e P. J. Alsina (2011). A real-time attitude estimation scheme for hexarotor micro aerial vehicle. Em: *Proceedings of 21st International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2011* (ABCM, Ed.). pp. 1–7.
- Sanca, A. S., J. P. F. Guimarães, P. J. Alsina e J. J. F. Cerqueira (2010b). Hexarotor design project: Modeling and energy management for outdoor aerial robot. Em: *Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM*. pp. 1–9.
- Sanca, A. S., P. J. Alsina e J. J. F. Cerqueira (2008). Dynamic modelling of a quadrotor aerial vehicle with nonlinear inputs. Em: *8th LARS IEEE Latin American Robotics Symposium*. pp. 143–148.
- Sanca, A. S., P. J. Alsina e J. J. F. Cerqueira (2010c). Dynamic modeling with nonlinear inputs and backstepping control for a hexarotor micro-aerial vehicle. Em: *2010 Latin American Robotics Symposium and Intelligent Robotics Meeting*. pp. 36–42.
- Sanca, A. S., P. J. Alsina e J. J. F. Cerqueira (2010d). Hexarotor micro-aerial vehicle: Modeling, backstepping control with nonlinear inputs and sensor fusion. Em: *XVII Congreso Internacional de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Sistemas - INTERCON*. pp. 1–8.
- Sanca, A. S., T. L. Laura, J. J. F. Cerqueira e P. J. Alsina (2010e). Dynamic modeling with nonlinear inputs and backstepping control for a hexarotor micro-aerial vehicle. Em: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA, SP*. pp. 1454–1461.
- Schildt, A. N., A. S. Sanca, J. P. F. Guimarães, M. S. Deus e P. J. Alsina (2012). Hardware and telemetry architectures to a quadrotor type unmanned aerial vehicle. Em: *Proceedings of the 5th Workshop in Applied Robotics and Automation - ROBOCONTROL. Bauru/SP*. pp. 1–6.
- Seddon, J. (1990). *Basic helicopter aerodynamics*. BSP Professional Books.
- Suh, Y. S. (2006). Attitude estimation by multiple-mode kalman filters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **53**(4), 1386–1389.
- Suh, Y. S., T. N. Do, Y. S. Ro e H. J. Kang (2010). A smoother for attitude estimation using inertial and magnetic sensors. Em: *2010 IEEE Sensors*. pp. 743–746.
- Tao, G. e P.V. Kokotović (1996). *Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities*. John Wiley & Sons, Inc.
- Tayebi, A. e S. McGilvray (2006). Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **14**(3), 562–571.

- T.Hamel, R. Mahony, R. Lozano e J. Ostrowski (2002). Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. Em: *15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*. pp. 1–6.
- Thrun, S., W. Burgard e D. Fox (2006). *Probabilistic Robotics*. The MIT Press.
- Wang, L. K., S.-C. Hsieh, E. C.-W. Hsueh, F.-B. Hsaio e K.-Y. Huang (2005). Complete pose determination for low altitude unmanned aerial vehicle using stereo vision. Em: *Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. pp. 108–113.
- Xue, L., W. Yuan, H. Chang e C. Jiang (2009). Mems-based multi-sensor integrated attitude estimation technology for mav applications. Em: *Proceedings of the 2009 4th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, Shenzhen, China*. pp. 1031–1035.
- Yafei, Y. e L. Jianguo (2010). Particle filtering for gyroless attitude/angular rate estimation algorithm. Em: *First International Conference on Pervasive Computing, Signal Processing and Applications*. pp. 1188–1191.
- Yin, L., J. Shi e Y. Huang (2010). Modeling and control for a six-rotor aerial vehicle. Em: *2010 International Conference on Electrical and Control Engineering*. pp. 1289–1292.
- Yongliang, W., W. Tianmiao, L. Jianhong, W. Chaolei e Z. Chen (2008). Attitude estimation for small helicopter using extended kalman filter. Em: *IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*. Vol. 1. pp. 577–581.
- Yoo, D., H. Oh, D. Won e M. Tahk (2010). Dynamic modeling and control system design for tri-rotor UAV. Em: *3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics*. pp. 762–767.
- Yu, Z., J. Shin K. Nonami e D. Celestino (2007). 3D vision based landing control of a small scale autonomous helicopter. *International Journal of Advanced Robotic Systems* **4**(1), 51–56.
- Zhang, J, W. Liu e Y. Wu (2010a). Novel technique for vision-based UAV navigation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **47**(4), 2731–2741.
- Zhang, J., Y. Wu, W. Liu e X. Chen (2010b). Novel approach to position and orientation estimation in vision-based UAV navigation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **46**(2), 687–700.
- Zhou, Jing e Changyun Wen (2008). *Adaptive backstepping control of uncertain systems: Nonsmooth nonlinearities, interactions or time-variations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Apêndice A

Quatérnios

NESTE apêndice é fornecido uma breve introdução sobre quatérnios e suas propriedades. Algumas operações básicas são apresentadas, provas e mais detalhes consulte (Kuipers., 1999).

A.1 Operações e Propriedades

Um quatérnio $q \in \mathbb{R}^4$ é representado por quatro parâmetros de números reais denotados por $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$. Alternativamente, é denotado por $q = (q_0, \mathbf{q})$, sendo q_0 e \mathbf{q} a parte escalar e vetorial do quatérnio, respectivamente. Os grupos especiais de quatérnios são $\mathcal{Q}_s = \{q \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{q} = 0\}$, $\mathcal{Q}_v = \{q \in \mathbb{R}^4 : q_0 = 0\}$ e $\mathcal{Q}_1 = \{q \in \mathbb{R}^4 : \|q\| = 1\}$.

Sejam p e q dois quatérnios, as seguintes operações são definidas:

$$\text{adição } p + q \triangleq (p_0 + q_0, \mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (\text{A.1})$$

$$\text{multiplicação } p \odot q \triangleq (p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}), \quad (\text{A.2})$$

$$\text{conjugado complexo } q^c \triangleq (q_0, -\mathbf{q}), \quad (\text{A.3})$$

$$\text{módulo } \|q\| \triangleq (q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(q \odot q^c)_0}, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{inverso } q^{-1} \triangleq \|q\|^{-2} q^c, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{produto interno } p \cdot q \triangleq -\frac{1}{2}(p \odot q + q \odot p), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{produto vetorial } p \otimes q \triangleq \frac{1}{2}(p \odot q - q \odot p). \quad (\text{A.7})$$

Retêm as propriedades associativa e distributiva. Porém, somente a adição é comutativa e produto em geral não.

$$\begin{aligned}
p + (q + r) &= (p + q) + r, \\
p + q &= q + p, \\
p \odot (q \odot r) &= (p \odot q) \odot r, \\
p \odot (q + r) &= p \odot q + p \odot r, \\
p \odot q &\neq q \odot p.
\end{aligned}$$

Uma exceção é o produto por escalar,

$$\lambda q = (\lambda, \mathbf{0}) \odot (q_0, \mathbf{q}) = (\lambda q_0, \lambda \mathbf{q}) = q \lambda.$$

Além disso, as propriedades seguintes são úteis,

$$\begin{aligned}
(p \odot q)^c &= q^c \odot p^c, \\
(p \odot q)^{-1} &= q^{-1} \odot p^{-1}, \\
\|p \odot q\| &= \|p\| \|q\|.
\end{aligned}$$

A.2 Exponencial

O quatérnio exponencial é definido por uma série de potência semelhante à matriz exponencial:

$$\exp(q) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \quad (\text{A.8})$$

O quatérnio exponencial de um vetor $v \in \mathcal{Q}_v$ é um caso especial, já que $v = (0, \mathbf{v})$ e $v^2 \triangleq v \odot v = (0 \cdot 0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}) = (-\|v\|^2, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\exp(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|\mathbf{v}\|^{2n}}{(2n)!}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|\mathbf{v}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= \left(\cos \|\mathbf{v}\|, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \|\mathbf{v}\| \right). \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

A operação inversa $\log q$ é para quatérnios unitários $q = (q_0, \mathbf{q})$ dado por

$$\log q = \frac{q}{\|q\|} \arccos(q_0) \quad (\text{A.10})$$

A.3 Notação Matricial/Vetorial

A multiplicação de um quaternião pode ser escrita usando uma notação Matricial/vetorial:

$$\begin{aligned}
 p \odot q &= (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\
 &= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

onde os operadores de multiplicação para a esquerda e para a direita, \cdot_L , \cdot_R são introduzidas. Note-se que

$$(q^c)_L = q_L^T, \quad (q^c)_R = q_R^T.$$

Esta notação é útil para derivar outras expressões, por exemplo,

$$\frac{d}{dp}(p \odot q) = \frac{d}{dp}(q_R p) = q_R \quad \frac{d}{dq}(p \odot q) = \frac{d}{dq}(p_L q) = p_L.$$

Além disso, os Jacobianos dos operadores matriciais tem a seguinte estrutura

$$D_{qL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_R^0 \\ e_R^1 \\ e_R^2 \\ e_R^3 \end{bmatrix}, \quad D_{qR} = \begin{bmatrix} e_L^0 \\ e_L^1 \\ e_L^2 \\ e_L^3 \end{bmatrix}, \tag{A.12}$$

onde $\{e^i\}_{i=0}^4 \in \mathbb{R}^4$.

A.4 Matriz de Rotação/Transformação

O hexarroto é restrito a seis graus de liberdade, sendo $\mathbf{V} = [{}^h v_x, {}^h v_y, {}^h v_z]'$ um vetor de velocidades lineares e $\boldsymbol{\Omega} = [{}^h \Omega_x, {}^h \Omega_y, {}^h \Omega_z]'$ um vetor de velocidades angulares. A relação existente entre a velocidade (\mathbf{V}) e ($\dot{\xi}$) é:

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}_t \mathbf{V}, \quad (\text{A.13})$$

onde \mathbf{R}_t é a matriz de transformação de velocidade linear (ângulos de Euler) entre o corpo do veículo e o sistema de referência inercial escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi}. & (\text{A.14}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A relação entre a derivada dos ângulos ϕ , θ e ψ e o vetor $\boldsymbol{\Omega}$ é expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{x,\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{x,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$= \mathbf{R}_r \dot{\phi} \quad (\text{A.16})$$

onde \mathbf{R}_r é uma matriz de rotação de velocidade do corpo do veículo e sua referência relativa, chamado também de matriz de ângulos de Tait-Bryan expressa como:

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A.5 Conversão entre Quatérnios e Ângulos de Euler

O operador quatérnio de rotação é equivalente a matriz de rotação para a sequência de ângulos de Euler. A Matriz de rotação equivalente à equação (A.14), em quatérnios é representado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi}. & (\text{A.18}) \\ &= \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para os ângulos de Euler têm-se

$$\phi = \arctan \left(\frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{2(q_0^2 + q_3^2) - 1} \right); \quad (\text{A.19})$$

$$\theta = -\arcsin(2(q_1 q_3 - q_0 q_2)); \quad (\text{A.20})$$

$$\psi = \arctan \left(\frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{2(q_0^2 + q_1^2) - 1} \right). \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

Determinação de Limites dos Ganhos para uma Estabilidade Assintótica Robusta

Neste apêndice, se fornece a derivação dos limites ganhos restantes para as demais funções de energia, como foi descrito no Capítulo 4, subseção 4.4.2. Usando as mesmas notações, considere-se $\alpha_3 = \alpha_4$, $\|\mathbf{z}_3\| \geq \epsilon_\theta$ e $\|\mathbf{z}_4\| \geq \epsilon_q$. A equação (4.46) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4) = & - \left(\alpha_3 - \frac{2\alpha_3\gamma_\theta}{\epsilon_\theta} \right) \mathbf{z}_3^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left[\alpha_3 + \frac{\alpha_3^2\gamma_\theta - \gamma_\theta - \mathbf{a}_2\gamma_p\mathbf{x}_6}{\epsilon_q} + \right. \\ & + \left. \frac{-\mathbf{a}_2\gamma_p\gamma_r - \mathbf{a}_2\gamma_r\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2k_r\gamma_q}{\epsilon_q} \right] \mathbf{z}_4^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left[\alpha_3 + \frac{\alpha_3^2\gamma_\theta - \gamma_\theta - \mathbf{a}_2\gamma_p\mathbf{x}_6}{\epsilon_q} + \right. \\ & + \left. \frac{-\mathbf{a}_2\gamma_p\gamma_r - \mathbf{a}_2\gamma_r\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2k_r\gamma_q}{\epsilon_q} \right] \epsilon_q^2 + \\ & + \gamma_\theta\gamma_q + (\gamma_q + \alpha_3\gamma_\theta) [\mathbf{a}_2\gamma_p\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_p\gamma_r + \\ & + \mathbf{a}_2\gamma_r\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_r\gamma_q + \alpha_3\gamma_q], \end{aligned} \tag{B.1}$$

A fim de satisfazer as condições dadas pelo Lemma 4.2, as seguintes desigualdades

são formuladas:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 - \frac{2\alpha_3\gamma_\theta}{\epsilon_\theta} &\geq 0 \\
\alpha_3 + \frac{\alpha_3^2\gamma_\theta - \gamma_\theta - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{q}}{\epsilon_\mathbf{q}} &\geq 0 \\
\frac{1}{2}[\alpha_3 + \frac{\alpha_3^2\gamma_\theta - \gamma_\theta - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} - \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{q}}{\epsilon_\mathbf{q}}]\epsilon_\mathbf{q}^2 &\geq \\
\gamma_\theta\gamma_\mathbf{q} + (\gamma_\mathbf{q} + \alpha_3\gamma_\theta)[\mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{q} + \alpha_3\gamma_\mathbf{q}], &
\end{aligned} \tag{B.2}$$

que produzem os seguintes limites para os ganhos de controle:

$$\alpha_3 \geq \max \begin{cases} -\frac{\epsilon_\theta}{2\gamma_\theta} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_\theta^2}{4\gamma_\theta^2} + \frac{\gamma_\theta + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{q}}{\gamma_\theta}} \\ \alpha_3 \geq -\frac{\mathbf{c}_3}{2\gamma_\theta(\epsilon_\mathbf{q} - 2\gamma_\mathbf{q})} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{c}_3}{2\gamma_\theta(\epsilon_\mathbf{q} - 2\gamma_\mathbf{q})}\right)^2 + \frac{\mathbf{c}_4}{\gamma_\theta(\epsilon_\mathbf{q} - 2\gamma_\mathbf{q})}} \\ \alpha_4 = \alpha_3 \end{cases} \tag{B.3}$$

onde

$$\mathbf{c}_3 = \epsilon_\mathbf{q}^2 - 2[\gamma_\mathbf{q}^2 + \mathbf{a}_2\gamma_\theta\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_\theta\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\gamma_\theta\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\theta\gamma_\mathbf{q}],$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_4 = \epsilon_\mathbf{q}\gamma_\theta + \mathbf{a}_2\epsilon_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\epsilon_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\epsilon_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\epsilon_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{q} + \\
+ 2[\gamma_\theta\gamma_\mathbf{q} + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_6 + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\gamma_\mathbf{q}\gamma_\mathbf{r}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{q}^2].
\end{aligned}$$

De forma semelhante, considere-se $\alpha_5 = \alpha_6$, $\|\mathbf{z}_5\| \geq \epsilon_\psi$ e $\|\mathbf{z}_6\| \geq \epsilon_\mathbf{r}$. A equação (4.47) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{z}}_5, \tilde{\mathbf{z}}_6) = & -(\alpha_5 - \frac{2\alpha_5\gamma_\psi}{\epsilon_\psi})\mathbf{z}_5^2 - \\
& -\frac{1}{2}[\alpha_5 + \frac{\alpha_5^2\gamma_\psi - \gamma_\psi - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2}{\epsilon_\mathbf{r}} + \\
& + \frac{-\mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{r}}{\epsilon_\mathbf{r}}]\mathbf{z}_5^2 - \\
& -\frac{1}{2}[\alpha_5 + \frac{\alpha_5^2\gamma_\psi - \gamma_\psi - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2}{\epsilon_\mathbf{r}} + \\
& + \frac{-\mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{r}}{\epsilon_\mathbf{r}}]\epsilon_\mathbf{r}^2 + \\
& + \gamma_\psi\gamma_\mathbf{r} + (\gamma_\mathbf{r} + \alpha_5\gamma_\psi)[\mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} + \\
& + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_\mathbf{r}\gamma_\mathbf{r} + \alpha_5\gamma_\mathbf{r}],
\end{aligned} \tag{B.4}$$

As desigualdades formuladas são:

$$\begin{aligned}
\alpha_5 - \frac{2\alpha_5\gamma_\psi}{\epsilon_\psi} &\geq 0 \\
\alpha_5 + \frac{\alpha_5^2\gamma_\psi - \gamma_\psi - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3k_r\gamma_r}{\epsilon_r} &\geq 0 \\
\frac{1}{2}[\alpha_5 + \frac{\alpha_5^2\gamma_\psi - \gamma_\psi - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} - \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 + \mathbf{b}_3k_r\gamma_r}{\epsilon_r}]^2 &\geq \\
\gamma_\psi\gamma_r + (\gamma_r + \alpha_5\gamma_\psi)[\mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_r\gamma_r + \alpha_5\gamma_r], &
\end{aligned} \tag{B.5}$$

gerando os seguintes limites para os ganhos:

$$\alpha_5 \geq \begin{cases} -\frac{\epsilon_\psi}{2\gamma_\psi} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_\psi^2}{4\gamma_\psi^2} + \frac{\gamma_\psi + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_r\gamma_r}{\gamma_\psi}} \\ \alpha_5 \geq -\frac{\mathbf{c}_5}{2\gamma_\psi(\epsilon_r - 2\gamma_r)} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{c}_5}{2\gamma_\psi(\epsilon_r - 2\gamma_r)}\right)^2 + \frac{\mathbf{c}_6}{\gamma_\psi(\epsilon_r - 2\gamma_r)}} \end{cases} \tag{B.6}$$

sendo

$$\mathbf{c}_5 = \epsilon_r^2 - 2[\gamma_r^2 + \mathbf{a}_3\gamma_\psi\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_\psi\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} + \mathbf{a}_3\gamma_\psi\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_r\gamma_\psi\gamma_r],$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_6 = \epsilon_r\gamma_\psi + \mathbf{a}_3\epsilon_r\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\epsilon_r\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q} + \mathbf{a}_3\epsilon_r\gamma_\mathbf{p}\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_r\epsilon_r\gamma_r + \\
+ 2[\gamma_\psi\gamma_r + \mathbf{a}_3\gamma_r\gamma_\mathbf{q}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{p}\gamma_\mathbf{q}\gamma_r + \mathbf{a}_3\gamma_\mathbf{q}\gamma_r\mathbf{x}_4 - \mathbf{b}_3k_r\gamma_r^2].
\end{aligned}$$