



FENÔMENOS DE TRANSPORTE II
TRANSFERÊNCIA DE CALOR DEQ0303

Introdução à Condução (Cap. 2)

Professor Osvaldo Chiavone Filho

EXEMPLO 2.1

A difusividade térmica α é a propriedade de transporte controladora para um processo de transferência de calor por condução em regime transiente. Utilizando valores apropriados de k , ρ e c_p do Apêndice A, calcule α nas temperaturas indicadas para os seguintes materiais: alumínio puro, a 300 e 700 K; carboneto de silício a 1000 K e parafina a 300 K.

SOLUÇÃO

Dados: Definição de difusividade térmica α .

Achar: Valores numéricos de α nas temperaturas dadas para os materiais selecionados.

Propriedades: Tabela A.1, alumínio puro (300 K):

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 2702 \text{ kg/m}^3 \\ c_p = 903 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \\ k = 237 \text{ W/m} \cdot \text{K} \end{array} \right\} \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{237 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 903 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}$$
$$= 97,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Exemplo 2.1



Tabela A.1, alumínio puro (700 K):

$$\begin{aligned} \rho &= 2702 \text{ kg/m}^3 && \text{a } 300 \text{ K} \\ c_p &= 1090 \text{ J/kg} \cdot \text{K} && \text{a } 700 \text{ K (por interpolação linear)} \\ k &= 225 \text{ W/m} \cdot \text{K} && \text{a } 700 \text{ K (por interpolação linear)} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{\rho c_p} = \frac{225 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 1090 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} \\ &= 76 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Tabela A.2, carbetto de silício (1000 K):

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \rho &= 3160 \text{ kg/m}^3 && \text{a } 300 \text{ K} \\ c_p &= 1195 \text{ J/kg} \cdot \text{K} && \text{a } 1000 \text{ K} \\ k &= 87 \text{ W/m} \cdot \text{K} && \text{a } 1000 \text{ K} \end{aligned} \right\} \alpha \\ &= \frac{87 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{3160 \text{ kg/m}^3 \times 1195 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} \\ &= 23 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Tabela A.3, parafina (300 K):

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \rho &= 900 \text{ kg/m}^3 \\ c_p &= 2890 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \\ k &= 0,24 \text{ W/m} \cdot \text{K} \end{aligned} \right\} \alpha \\ &= \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0,24 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{900 \text{ kg/m}^3 \times 2890 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} \\ &= 9,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

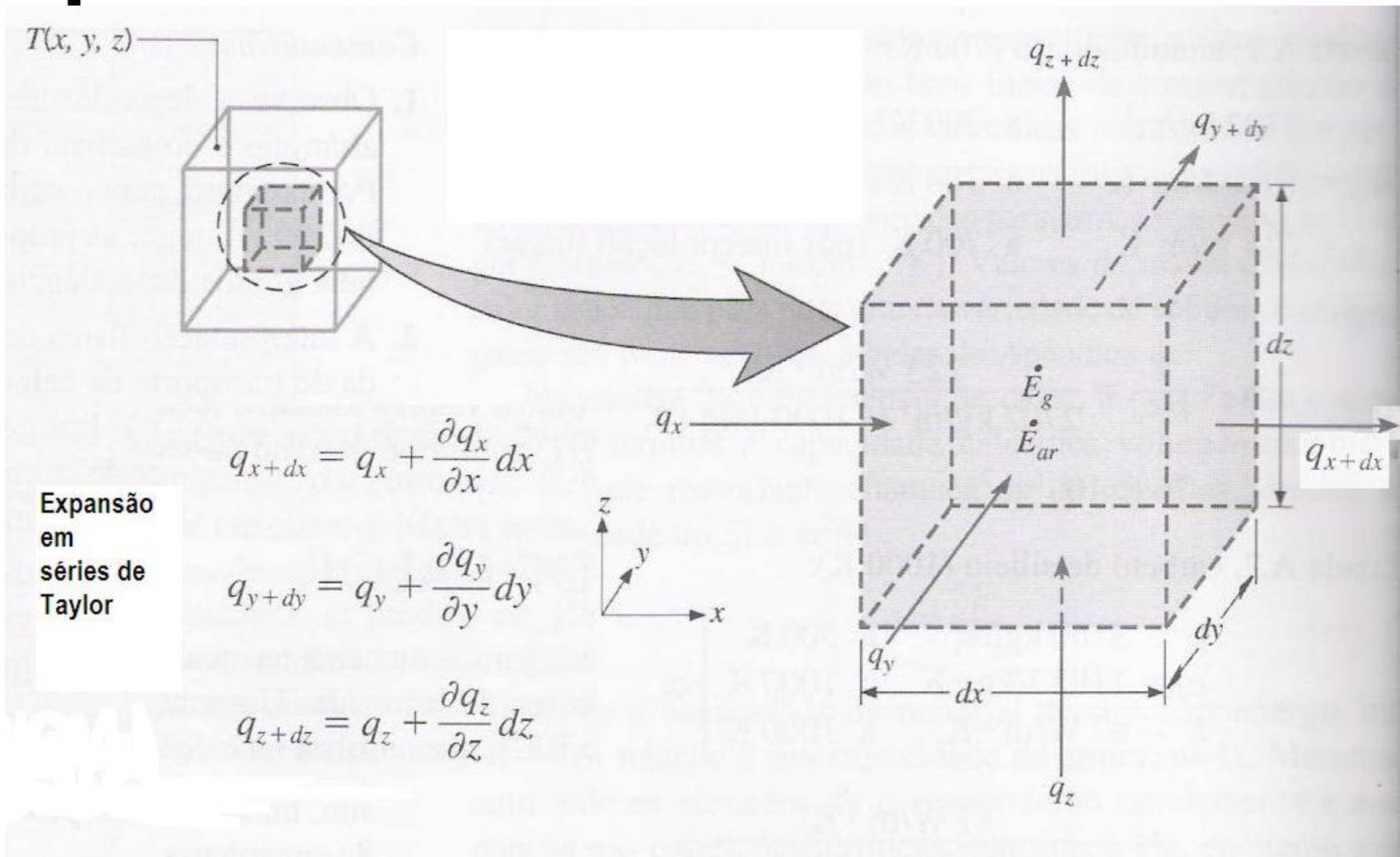
Comentários:

1. Observe a dependência das propriedades termofísicas do alumínio e do carbetto de silício em relação à temperatura. Por exemplo, para o carbetto de silício, $\alpha(1000 \text{ K}) \approx 0,1 \times \alpha(300 \text{ K})$; logo, as propriedades desse material apresentam uma grande dependência com a temperatura.
2. A interpretação física de α é que ela representa uma medida de transporte de calor (k) em relação ao armazenamento de energia (ρc_p). Em geral, os sólidos metálicos possuem elevados valores de α , enquanto os não-metálicos (por exemplo, a parafina) possuem baixos valores de α .
3. Os valores das propriedades obtidas por interpolação linear são geralmente aceitáveis para os cálculos de engenharia.
4. O uso da massa específica obtida a uma temperatura mais baixa (300 K) para cálculos envolvendo temperaturas mais altas ignora os efeitos da expansão térmica, mas, mesmo assim, também é um procedimento aceitável para os cálculos de engenharia.
5. O software *IHT* possui uma biblioteca de propriedades termofísicas para sólidos, líquidos e gases selecionados e pode ser acessado através do botão na barra de ferramentas, *Properties*. As propriedades são expressas como funções intrínsecas, conforme mostrado para a condutividade térmica do ar atmosférico,

$$k = k_T(\text{"Ar"}, T) \quad // \text{Condutividade térmica, W/m} \cdot \text{K}$$

e são baseadas em valores tabulados no Apêndice A, com as temperaturas em unidades kelvin. Você pode criar suas próprias funções para representar valores das propriedades ou entrar com outros valores usando o recurso *User-Defined Function* no *IHT*, conforme descrito na seção do *Help*.

Volume de controle diferencial, $dx dy dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cartesianas.



$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz$$

$$\dot{E}_{ar} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_{ar}$$

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

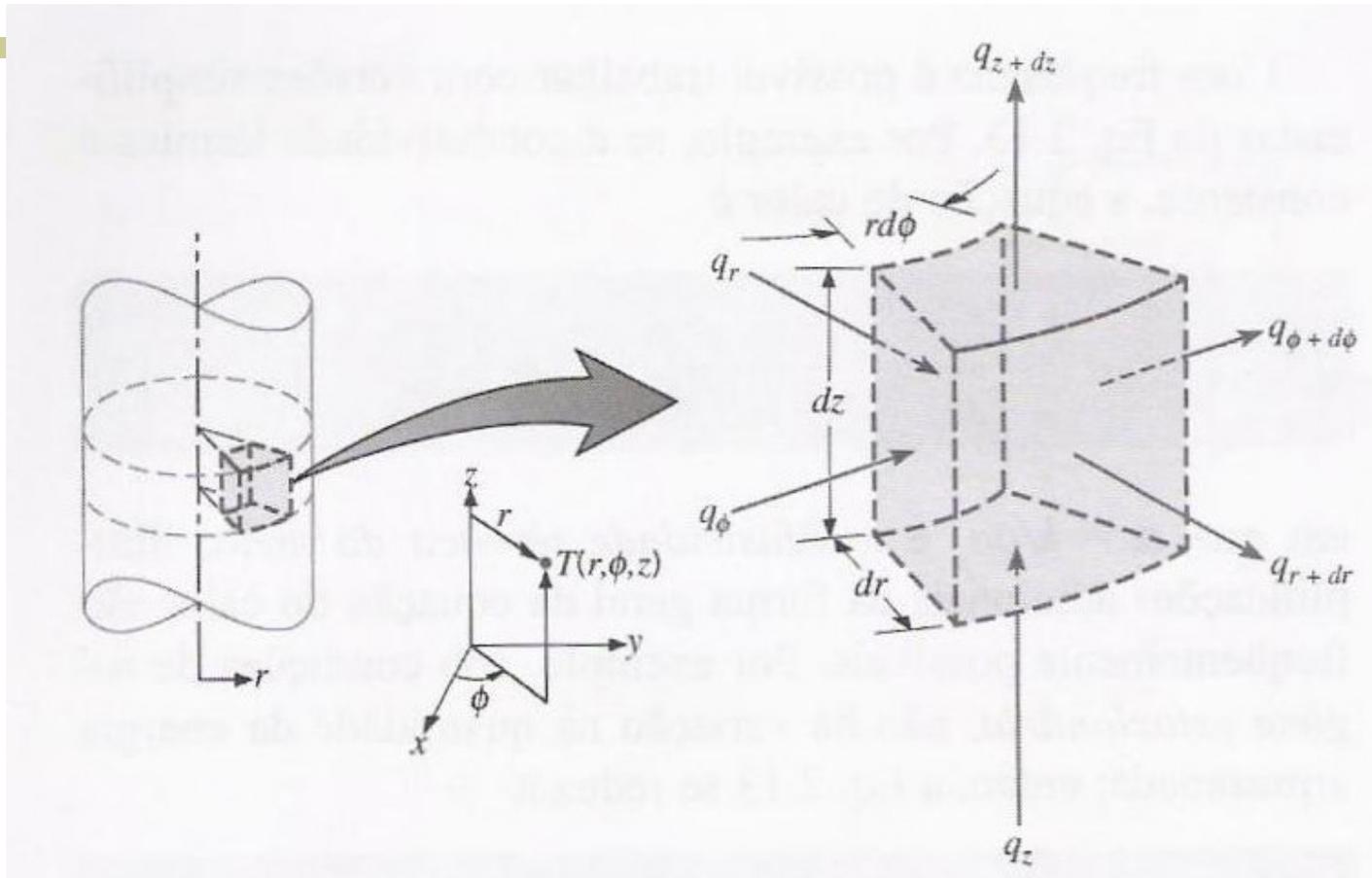
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

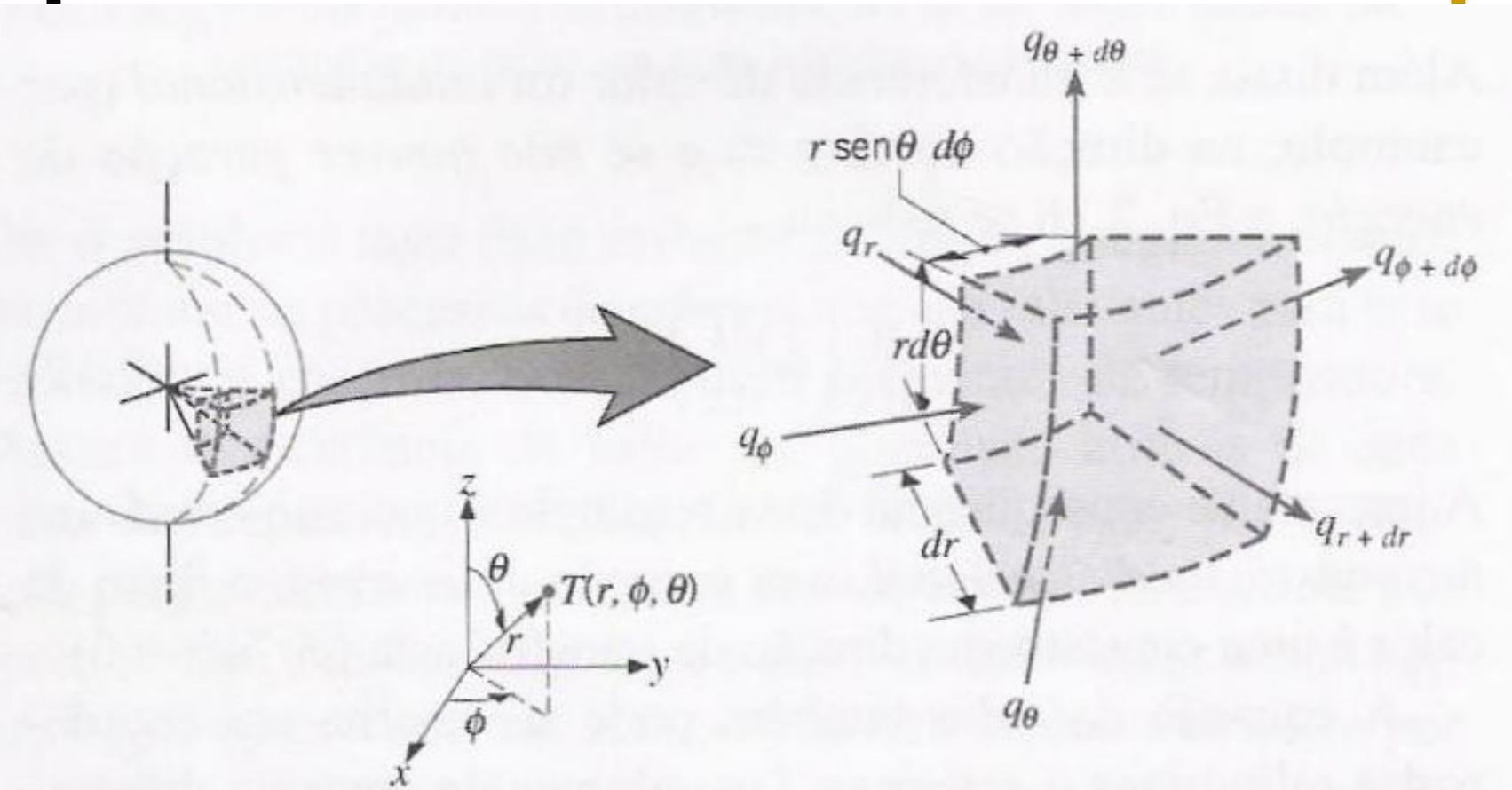
Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para a análise da condução de calor em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z).



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Direções: Radial, Circunferencial e Axial

Volume de controle diferencial, $dr \cdot r \text{ sen } \theta d\phi \cdot r d\theta$, para a análise da condução de calor em coordenadas esféricas (r, ϕ, θ)



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{ sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \text{ sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \text{ sen } \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Radial

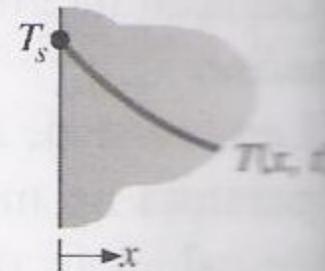
angular/circunferencial (direções)

CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

TABELA 2.1 Condições de contorno para a equação da difusão de calor ($x = 0$).

1. Temperatura da superfície constante

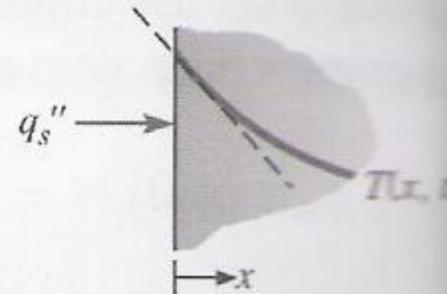
$$T(0, t) = T_s \quad (2.24)$$



2. Fluxo de calor constante na superfície

- (a) Fluxo de calor finito

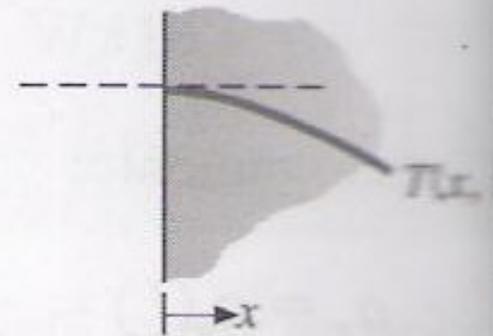
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s'' \quad (2.25)$$



CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

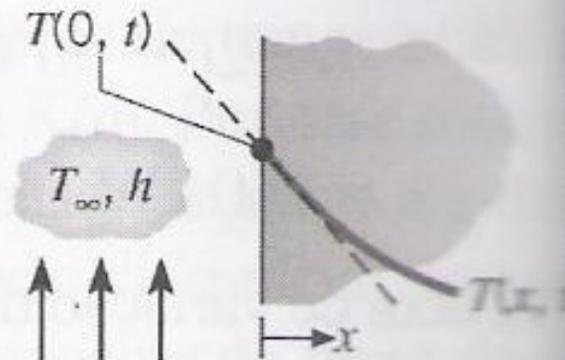
(b) Superfície adiabática ou isolada

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.26)$$



3. Condição de convecção na superfície

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h[T_{\infty} - T(0, t)] \quad (2.27)$$

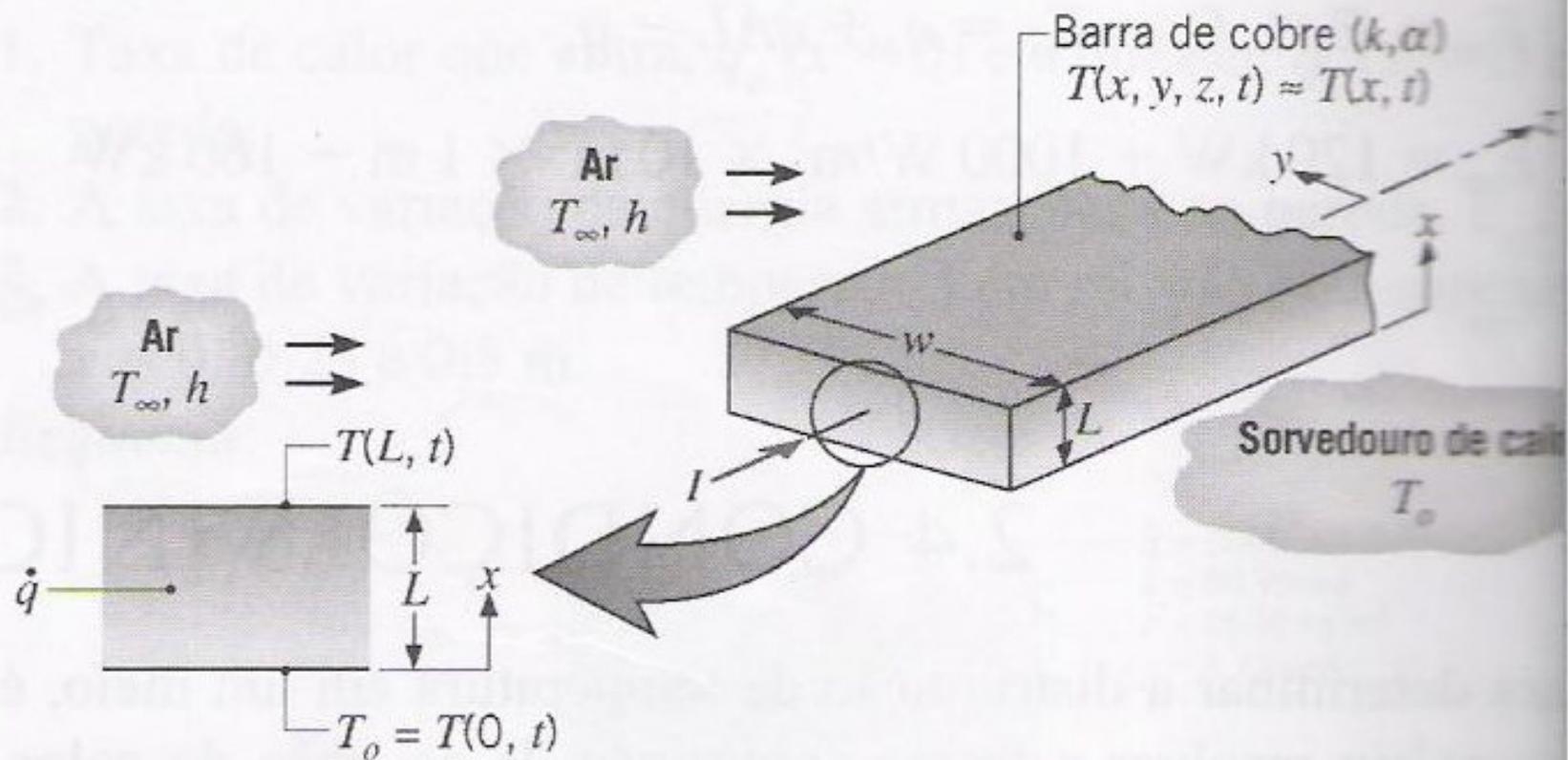


Exemplo 2.3

Uma longa barra de cobre com seção reta retangular, cuja largura w é muito maior do que a sua espessura L , é mantida em contato com um sorvedouro de calor através de sua superfície inferior, de tal modo que a temperatura ao longo da barra é aproximadamente igual à do sorvedouro, T_o . Subitamente, uma corrente elétrica passa através da barra e uma corrente de ar com temperatura T_∞ é soprada sobre a sua superfície superior, enquanto a superfície inferior é mantida a T_o . Obtenha a equação diferencial e as condições iniciais e de contorno que podem ser resolvidas para a determinação da temperatura da barra em função da posição e do tempo.

Exemplo 2.3

Esquema:



Exemplo 2.3

Dados: Uma barra de cobre inicialmente em equilíbrio térmico com um sorvedouro de calor é subitamente aquecida pela passagem de uma corrente elétrica.

Achar: A equação diferencial e as condições inicial e de contorno necessárias para a determinação da temperatura da barra em função da posição e do tempo no interior da barra.

Hipóteses:

1. Como $w \gg L$, a transferência de calor através das superfícies laterais da barra é desprezível, sendo basicamente unidimensional na direção do eixo x .
2. Geração de calor uniforme por unidade de volume, \dot{q} .
3. Propriedades constantes.

Exemplo 2.3

Análise: A distribuição de temperatura é dada pela equação do calor (2.13), que, para as condições do presente problema de transferência de calor unidimensional com propriedades constantes, se reduz a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1) \quad \triangleleft$$

em que a temperatura é uma função da posição e do tempo, $T(x,t)$. Uma vez que essa equação diferencial é de segunda ordem em relação à coordenada espacial x e de primeira ordem em relação ao tempo t , devem ser fornecidas duas condições de contorno na direção do eixo x e uma condição, chamada inicial, para o tempo. A condição de contorno para a superfície inferior corresponde ao caso 1 da Tabela 2.1. Em particular, como a temperatura nessa superfície é mantida em um valor constante, T_o , em relação ao tempo, tem-se que

$$T(0, t) = T_o \quad (2) \quad \triangleleft$$

Exemplo 2.3

Por outro lado, a condição de transferência de calor por convecção na superfície, caso 3 da Tabela 2.1, é apropriada para a superfície superior da barra. Logo

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_{\infty}] \quad (3) \quad \triangleleft$$

A condição inicial é inferida a partir do reconhecimento de que, antes da mudança nas condições, a barra encontrava-se a uma temperatura uniforme T_o . Assim

$$T(x, 0) = T_o \quad (4) \quad \triangleleft$$

Se T_o , T_{∞} , \dot{q} e h forem conhecidos, as Eqs. de 1 a 4 podem ser resolvidas para se obter a distribuição de temperatura $T(x, t)$ em função do tempo após a imposição da corrente elétrica.

Exemplo 2.3

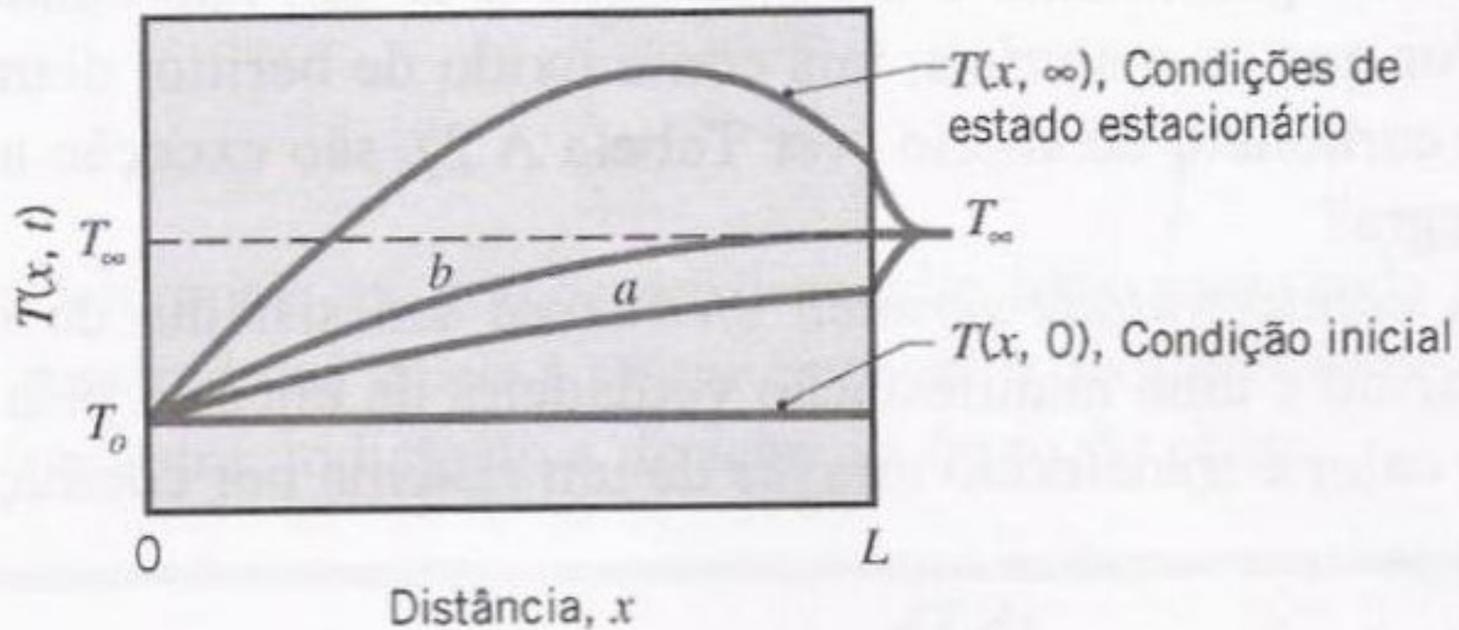
Comentários:

1. O *sorvedouro de calor* em $x = 0$ pode ser mantido pela exposição dessa superfície da barra a um banho com gelo, ou então pelo contato com uma *chapa fria*. Uma chapa fria possui canais refrigerantes que são usinados em um sólido com elevada condutividade térmica (em geral cobre). Pela circulação de um líquido (em geral água) através desses canais, a chapa, e portanto a superfície com a qual está em contato, pode ser mantida a uma temperatura praticamente uniforme.

Exemplo 2.3

2. A temperatura da superfície superior da barra $T(L,t)$ variará com o tempo. Essa temperatura é uma incógnita e pode ser obtida após a determinação da distribuição de temperatura na barra, $T(x,t)$.
3. Podemos utilizar nossa intuição física para esboçar as distribuições de temperatura na barra para tempos especificados do início ao fim do processo transiente. Se considerarmos que $T_\infty > T_0$ e que a corrente elétrica é suficientemente elevada para aquecer a barra a uma temperatura que supere T_∞ , a seguinte distribuição de temperatura corresponderia à condição inicial ($t \leq 0$), à condição ($t \rightarrow \infty$) final (regime estacionário) e a dois tempos intermediários.

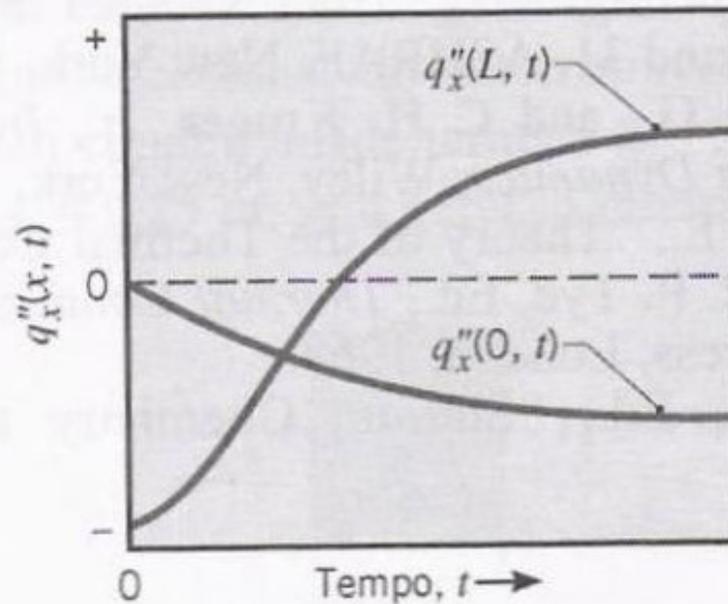
Exemplo 2.3



Observe como a distribuição está de acordo com as condições iniciais e de contorno. Qual a característica especial da distribuição denominada (b)?

Exemplo 2.3

4. Podemos também utilizar nossa intuição para deduzir de que forma o fluxo de calor varia com o tempo nas superfícies ($x = 0, L$) da barra. Nas coordenadas $q_x'' - t$, as variações do transiente são as seguintes.



Conscientize-se de que as variações precedentes estão coerentes com a distribuição de temperatura do Comentário 3. Para $t \rightarrow \infty$, como são relacionados $q_x''(0)$ e $q_x''(L)$ com a taxa de geração de energia volumétrica?