



FENÔMENOS DE TRANSPORTE II
TRANSFERÊNCIA DE CALOR DEQ303

Condução Unidimensional em Regime Estacionário
5ª parte (Geração de Energia Térmica e Superfícies Estendidas)

Professor Osvaldo Chiavone Filho

Soluções unidimensionais em regime estacionário para equação de calor *sem geração de energia**

	PAREDE PLANA	PAREDE CILÍNDRICA ^a	PAREDE ESFÉRICA ^a
Equação do calor	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
Distribuição de temperatura	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
Fluxo de calor (q'')	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
Taxa de calor (q)	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
Resistência térmica ($R_{t,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

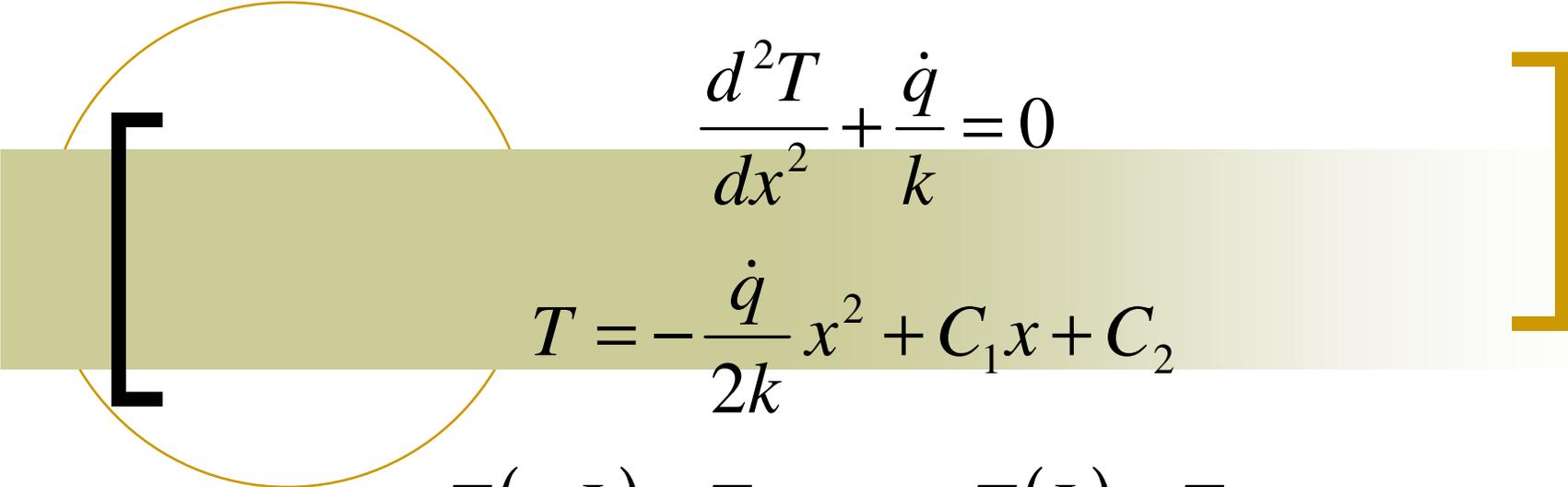
^aO raio crítico do isolamento é $r_{cr} = k/h$ para o cilindro e $r_{cr} = 2k/h$ para a esfera.

*revisão

****condução unidimensional em regime estacionário, em uma parede plana, sem geração de calor e condutividade térmica constante, a temperatura varia linearmente com x**

Condução com geração de energia térmica

Parede Plana


$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

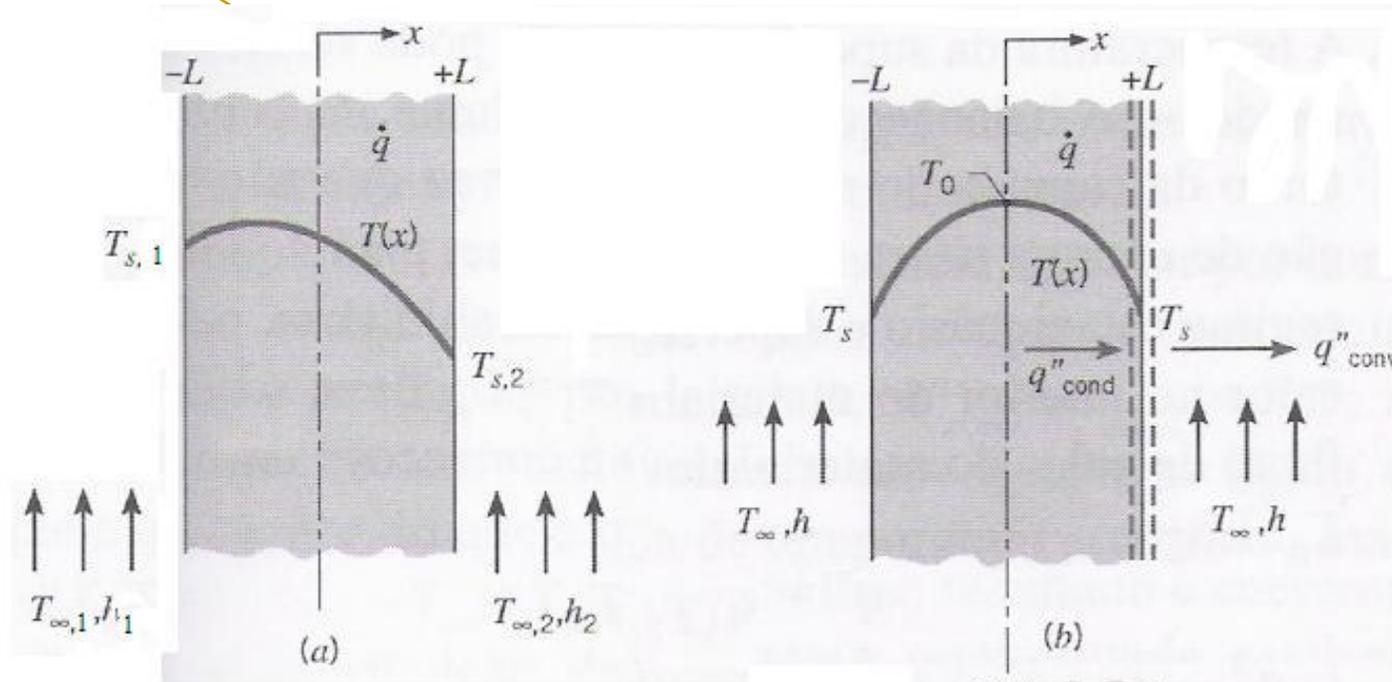
$$T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

$$T(-L) = T_{S,1} \quad e \quad T(L) = T_{S,2}$$

$$C_1 = \frac{T_{S,2} - T_{S,1}}{2L} \quad e \quad C_2 = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 + \frac{T_{S,1} + T_{S,2}}{2}$$

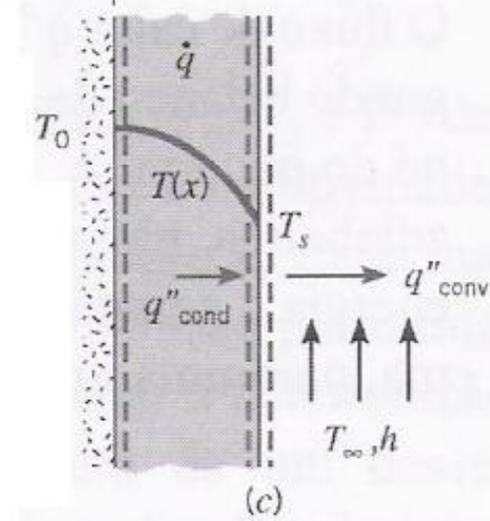
$$T = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{T_{S,2} - T_{S,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{S,1} + T_{S,2}}{2}$$

Condução com geração de energia térmica Parede Plana



***com geração o fluxo de calor não é mais independente de x**

**** (b) $x=0$:**
$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

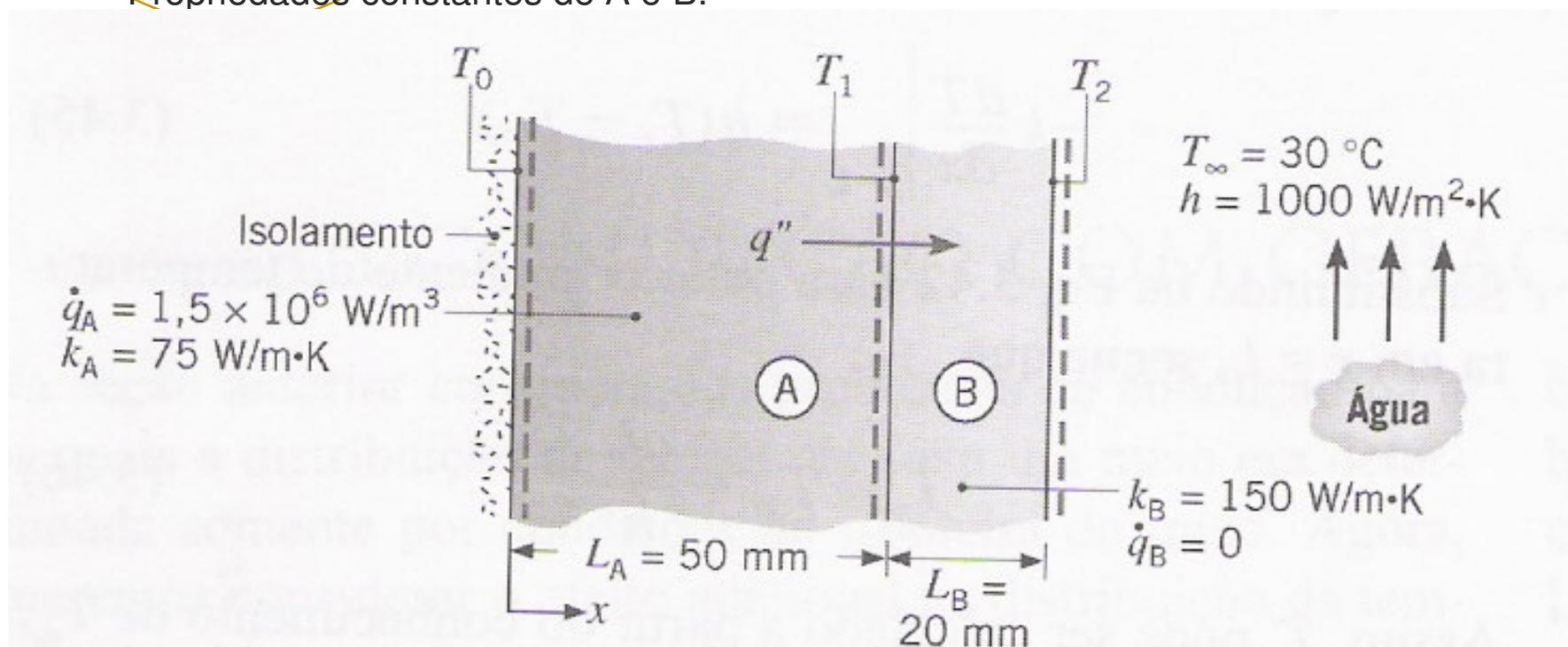


Exemplo 3.6-) Uma dada parede plana é composta por dois materiais, A e B. A camada do material A tem uma geração de calor uniforme $\dot{q}_A = 1,5 \times 10^6 \text{ W/m}^3$, $k_A = 75 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ e espessura $L_A = 50 \text{ mm}$. A camada do material B, com $k_B = 150 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ e espessura $L_B = 20 \text{ mm}$, não tem geração de calor. A superfície interna do material B é resfriada por uma corrente de água com $T_\infty = 30^\circ\text{C}$ e $h = 1000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

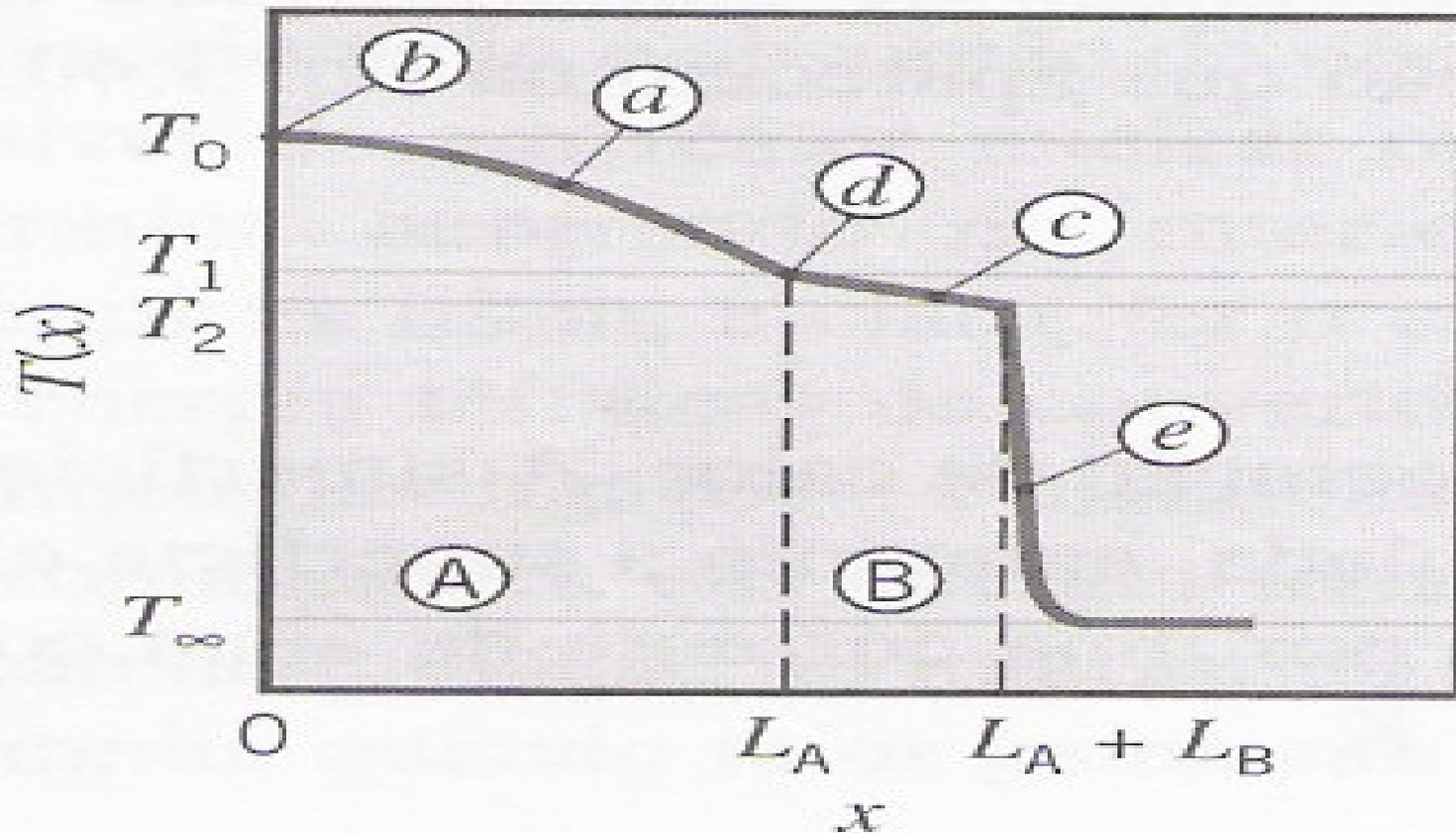
1-) Esboce a distribuição de temperatura existente na parede composta em condições de regime estacionário.

2-) Determine a temperatura T_0 da superfície de isolamento e a temperatura T_2 da superfície resfriada.

Hipoteses: Regime estacionário, unidimensional em x , resistência de contato entre as paredes é desprezível, superfície interna de A adiabática e Propriedades constantes de A e B.



- (1)
- (a) Parabólica no material A.
 - (b) Inclinação zero na superfície isolada.
 - (c) Linear no material B.
 - (d) Mudança na inclinação $=K_B/K_A=2$ na interface de contato entre as camadas.
 - (e) Gradientes elevados próximos à superfície.



- (2) A temperatura da superfície externa T_2 pode ser obtida aplicando-se um balanço de energia ao volume de controle em torno da camada do material B.

$$q'' = h(T_2 - T_\infty) \quad (1)$$

Como para $x=0$ tem-se que a superfície é adiabática.

$$q'' = \dot{q} L_A \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2) temos:

$$T_2 = T_\infty + \frac{\dot{q} L_A}{h}$$

$$T_2 = 30^\circ\text{C} + \frac{1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3 \cdot 0,05\text{m}}{1000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} = 105^\circ\text{C}$$

* Temperatura da superfície isolada

$$T_0 = \frac{\dot{q} \cdot L_A^2}{2K_A} + T_1$$

onde T_1 é $T_1 = T_\infty + (R'' \text{ cond, B} + R'' \text{ conv}) q''$

onde as resistências de área são:

$$R'' \text{ cond, B} = L_B / K_B \quad R'' \text{ conv} = 1/h$$

logo:

$$T_1 = 30^\circ + (0,02\text{m} / 150\text{w/m.k} + 1 / 1000\text{W/m}^2 \cdot \text{K}) \cdot 1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3 \cdot 0,05\text{m}$$

$$T_1 = 30 + 85 = 115^\circ\text{C}$$

Substituindo na equação 3.

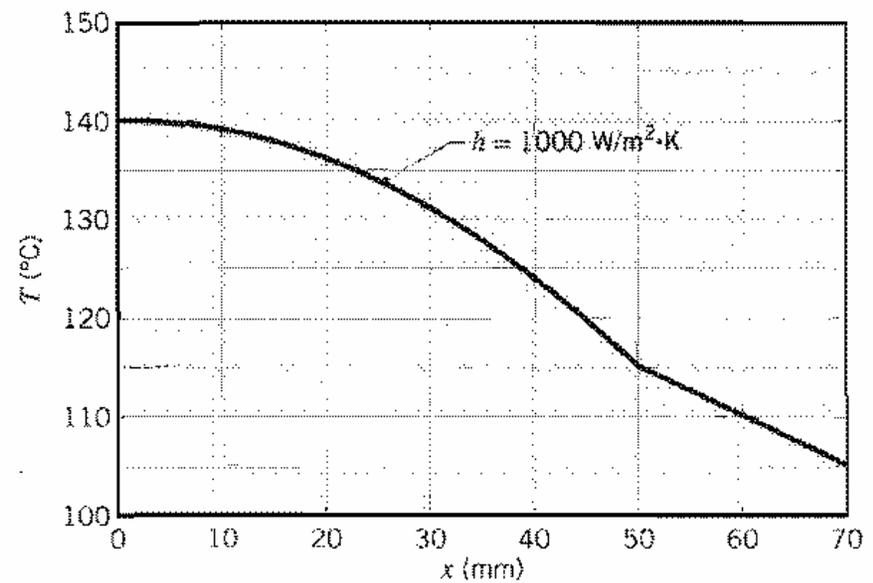
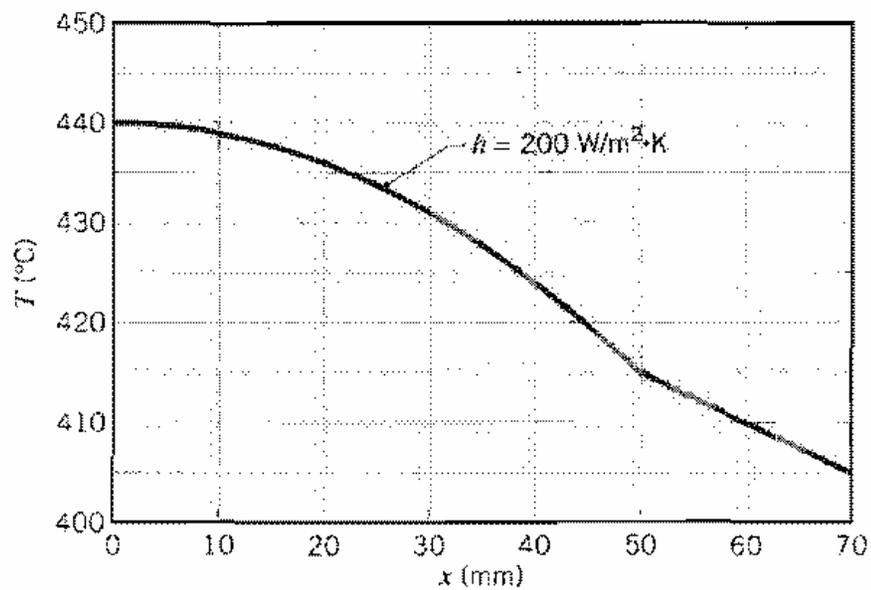
$$T_0 = \frac{1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3 \cdot (0,05\text{m})^2}{2 \times 75 \text{ W/m} \cdot \text{K}} + 115^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 25 + 115 = 140^\circ\text{C}$$

COMENTÁRIOS

- 1 - O material A, tendo geração de energia, não pode ser representado por um elemento de um circuito térmico.
- 2 - A resistência à transferência de calor por convecção é significativamente maior do que a resistência devida à condução no material B, a diferença de temperatura entre a superfície e o fluido é muito maior do que a queda de temperatura através do material B.
- 3 - As temperaturas da superfície e da interface (T_0 , T_1 e T_2) dependem da taxa de geração de calor \dot{q} , das condutividades térmicas k_A e k_B e do coeficiente de convecção h .

Dependência do coeficiente de convecção h (Ex. 3.6)



SISTEMAS RADIAIS

A geração de calor pode ocorrer em uma variedade de geometrias radiais.

Para determinar a distribuição de temperatura no cilindro, começamos com a forma apropriada da equação de calor. Para a condutividade térmica constante que se reduz a:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q}{k} = 0$$

Separando variáveis e considerando a geração de calor uniforme, essa expressão pode ser integrada para obter

$$r \frac{dT}{dr} = \frac{q}{2k} r^2 + C_1$$

Repetindo o procedimento, a solução geral para a distribuição de temperatura torna-se:

$$T(r) = \frac{q}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Para obter as constantes de integração C_1 e C_2 aplicamos as condições de contorno

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$T(r_o) = T_s$$

A primeira condição resulta da simetria da situação. Ou seja, para o cilindro sólido a linha central é uma linha de simetria para a distribuição de temperatura e gradiente de temperatura deve ser nulo.

A distribuição de temperatura é portanto:

$$T(r) = \frac{qr_0^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s$$

Avaliando a equação na linha de centro e dividindo o resultado obtido pela própria equação obtemos a distribuição de temperatura na forma adimensional:

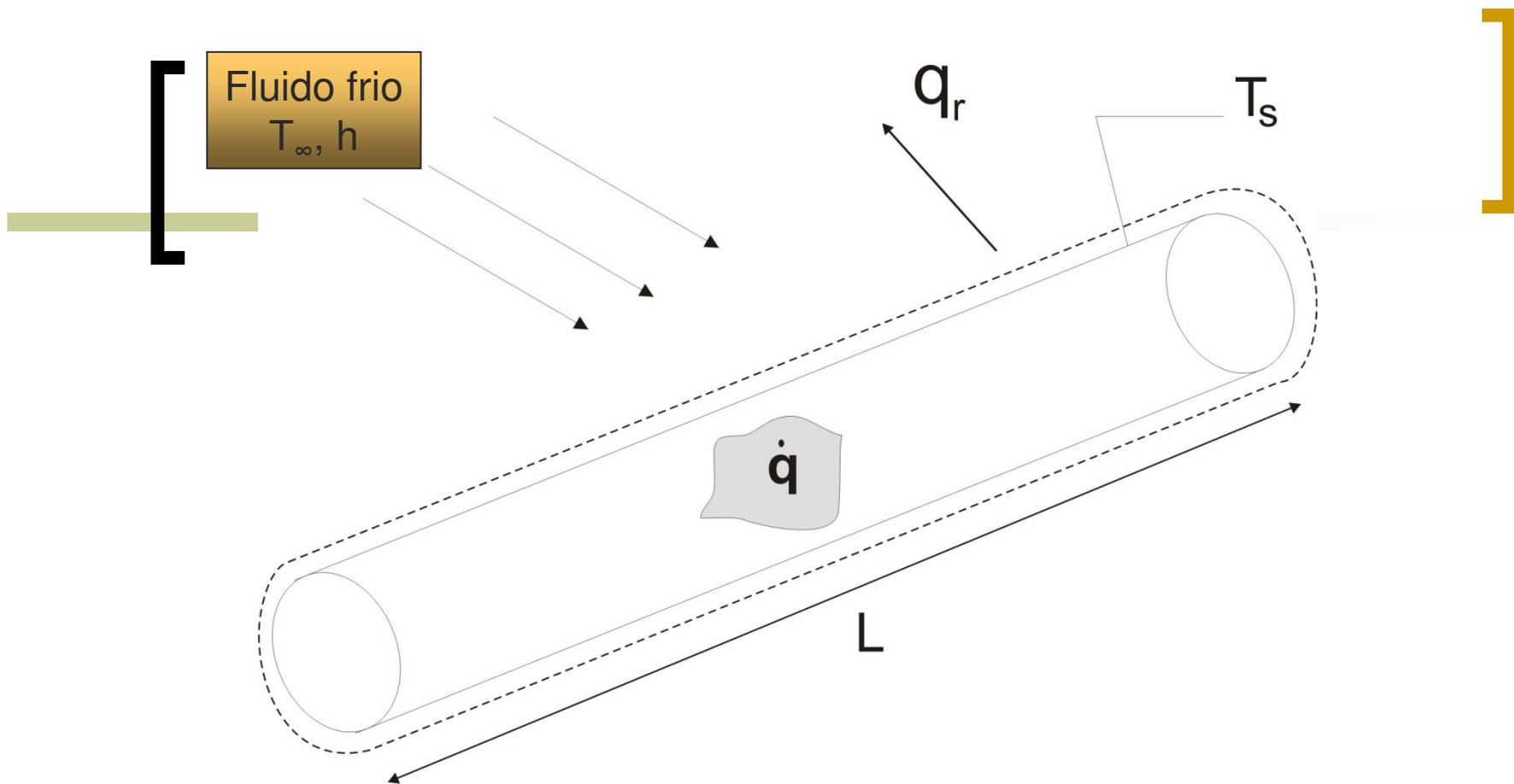
$$\frac{T(r) - T_s}{T_o - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2$$

Para relacionar a temperatura da superfície T_s , com a temperatura do fluido frio, T_∞ , tanto o balanço de energia na superfície quanto o balanço de energia total podem ser utilizados. Escolhendo a segunda abordagem, obtemos:

$$q(\pi r_0^2 L) = h(2\pi r_0 L)(T_s - T_\infty)$$

ou

$$T_s = T_\infty + \frac{q r_0}{2h}$$



Condução em um cilindro com geração uniforme de calor

A decorative graphic consisting of a thin yellow circle. A thick black bracket is on the left side, and a thick yellow bracket is on the right side. A horizontal bar with a green-to-white gradient is positioned across the middle of the circle.

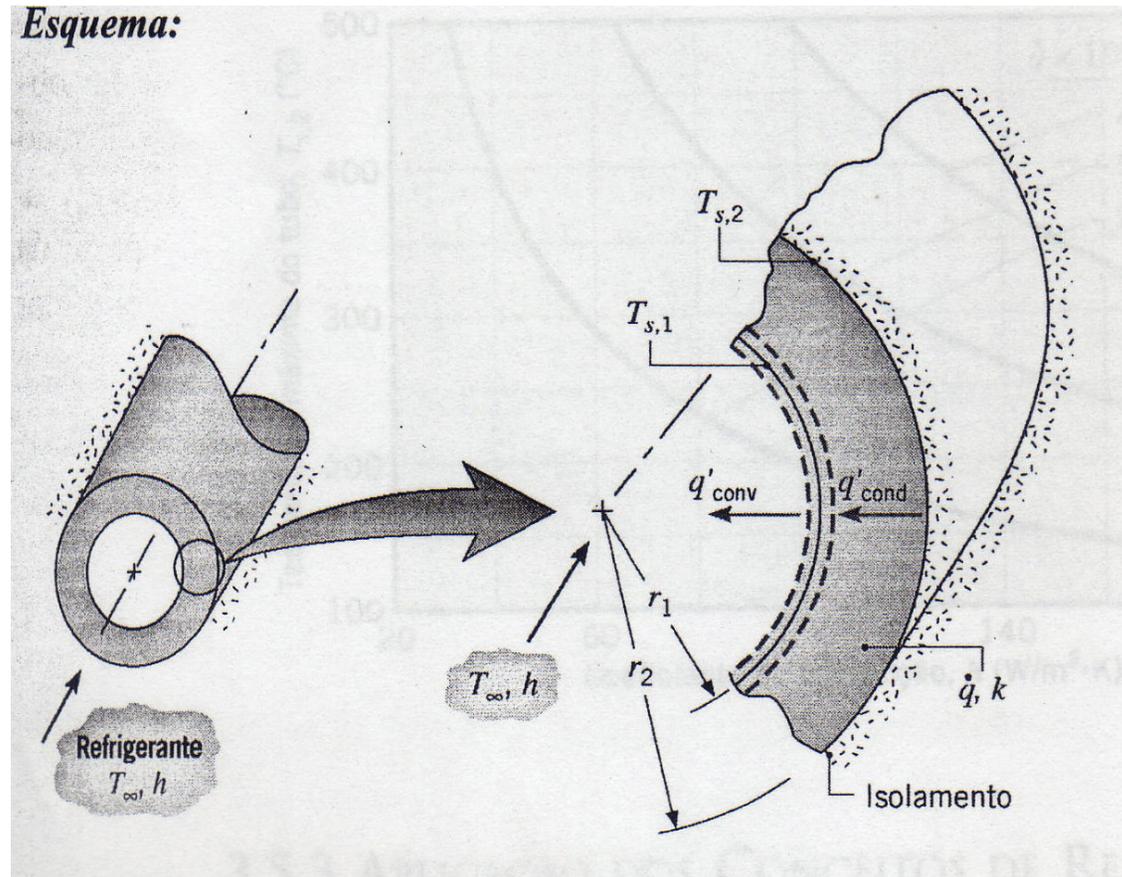
Exemplo 3.7

Considere um tubo longo isolado na superfície externa de raio r_2 e resfriado na superfície interna de raio r_1 , com geração uniforme de calor q no interior do sólido.

[Solução]

- Achar:
 1. A solução geral para a distribuição de temperatura $T(x)$.
 2. As condições de contorno apropriadas e a forma correspondente da distribuição de temperatura.
 3. A taxa de calor removida.
 4. O coeficiente de convecção na superfície interna.

[Esquema]



[Hipóteses]

1. Regime estacionário;
2. Condução unidimensional radial;
3. Propriedades constantes;
4. Geração de calor volumétrico uniforme;
5. Superfície externa adiabática.

[Análise]

- Para uma análise das constantes, recorreremos ao limite da temperatura dado:
- $T(r_2) = T_{s,2}$
- Aplicando a lei de Fourier na superfície:
- $(dT/dr)_{r_2} = 0$
- Utilizando-se as temperaturas dadas na eq. 3.51
- $T_{s,2} = -q r_2^2 / 4k + c_1 \ln r_2 + c_2$

- 
- Aplicando-se a lei de Fourier na eq. 3.50 e a condição de contorno em r_2 :
 - $0 = -qr_2^2/2k + c_1 \quad c_1 = qr_2^2/2k$
 - $C_2 = T_{s,2} + qr_2^2/4k - qr_2^2 \ln r_2 / 2k$
 - Substituindo c_1 e c_2 na solução geral:
 - $T(r) = T_{s,2} + (r_2^2 - r^2) q/4k - [qr_2^2 \ln(r_2/r)] / 2k$

A taxa de calor removida pode ser determinada da lei de Fourier:

- $qr' = -k 2 \pi r dT/dr$
- $qr'(r_1) = -k 2 \pi r_1 (-qr_1/2k + qr_2^2/2kr_1)$
- $= -\pi q(r_2^2 - r_1^2)$
- Para um volume de controle ao redor do tubo, pela conservação da energia temos:
 $E_g - E_s = 0$; $E_g = q \pi (r_2^2 - r_1^2) L$ e
 $E_s = q'_{cond} L = qr'(r_1) L$
- $qr(r_1) = -\pi q (r_2^2 - r_1^2)$

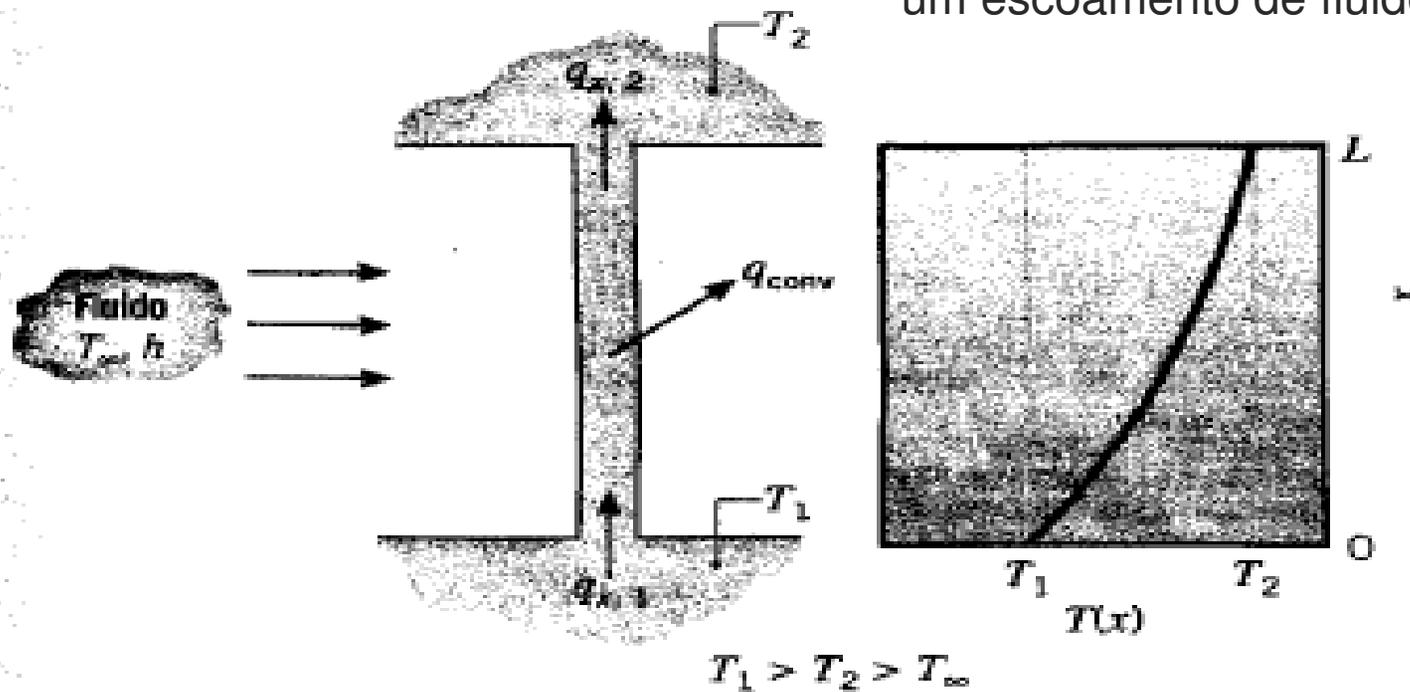
- 
- Aplicando a exigência da conservação de energia temos:
 - $q'_{\text{cond}} = q'_{\text{conv}}$
 - $\pi q (r_2^2 - r_1^2) = h 2 \pi r_1 (T_{s,1} - T_{\infty})$

$$h = \frac{\dot{q}(r_2^2 - r_1^2)}{2r_1(T_{s,1} - T_{\infty})}$$

Introdução a Superfícies estentidas

- **Superfícies estentidas:** termo utilizado para retratar um caso especial envolvendo transferência de calor por condução no interior de um sólido e transferência de calor por convecção / radiação entre as fronteiras do sólido e a vizinhança.
- A transferência de calor das fronteiras agora é perpendicular à direção da principal transferência de calor no sólido.

DEMONSTRAÇÃO



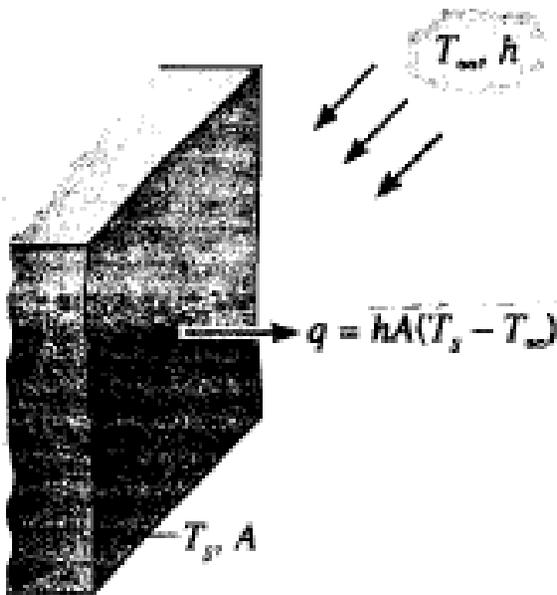
Estrutura conecta duas paredes a diferentes temperaturas e através de um escoamento de fluido

Fig. 3.11 Combinação de condução e convecção em um elemento estrutural.

APLICAÇÃO PARA UMA SUPERFÍCIE ESTENDIDAS

COMO AUMENTAR A TAXA TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENTRE UM SÓLIDO E UM FLUIDO ADJACENTE !

SUPERFÍCIE PLANA



Para um aumento da taxa de transferência na fig. 1(a) – superfície plana. Temos :

- O aumento do coeficiente de convecção
- Redução da temperatura do fluido.

Conseqüência: aumento de custo (potência dos sopradores) e as vezes impossibilidade da redução da temperatura do fluido.

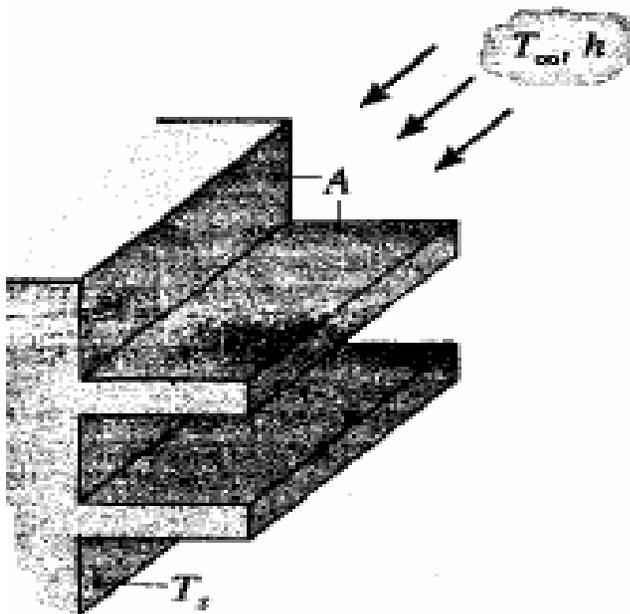
APLICAÇÃO PARA UMA SUPERFÍCIE ESTENDIDAS

COMO AUMENTAR A TAXA TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENTRE UM SÓLIDO E UM FLUIDO ADJACENTE !

SUPERFÍCIE COM ALETAS

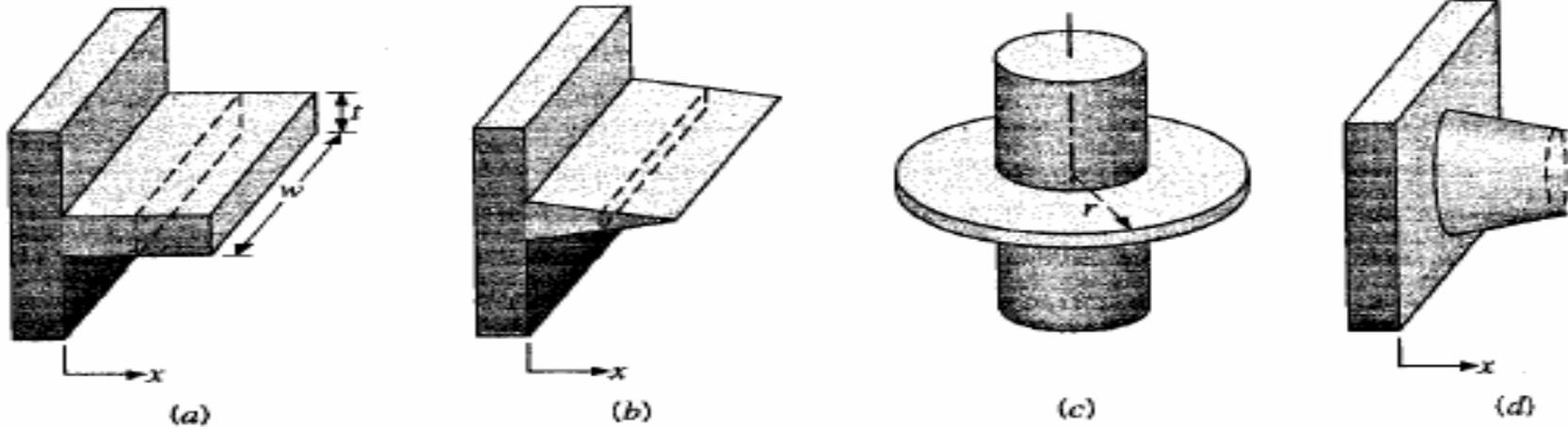
Para um aumento da taxa de transferência na fig. 2(a) – superfície com aletas. Temos :

- aumento da área de superfície (**aletas**), que contém um grande condutividade térmica.
- distribuição melhor da temperatura na superfície.



2 (b)

TIPOS DE ALETAS



A - ALETA RETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL.

B - ALETA RETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL NÃO UNIFORME.

C - ALETA ANULAR.

D - ALETA EM FORMA DE PINO.

3.6.1 Uma Análise Geral da Condução

Como engenheiros estamos interessados em saber a dimensão na qual uma determinada superfície estendida ou arranjos de aletas podem melhorar sua transferência de calor a partir de uma superfície para o fluido em contato. Para determinar a taxa de transferência de calor associada a uma aleta, devemos, em primeiro lugar, obter a distribuição temperatura ao longo da aleta.

A taxa na qual a energia é transferida por convecção para o fluido a partir de qualquer ponto da superfície da aleta deve ser igualada com a taxa na qual a energia atinge aquele ponto devido à condução na direção transversal (y,z). Mas, na prática, a aleta é delgada e as variações da temperatura na direção longitudinal são muito maiores do que aquelas na direção transversal. Assim sendo, podemos considerar condução unidimensional na direção x .

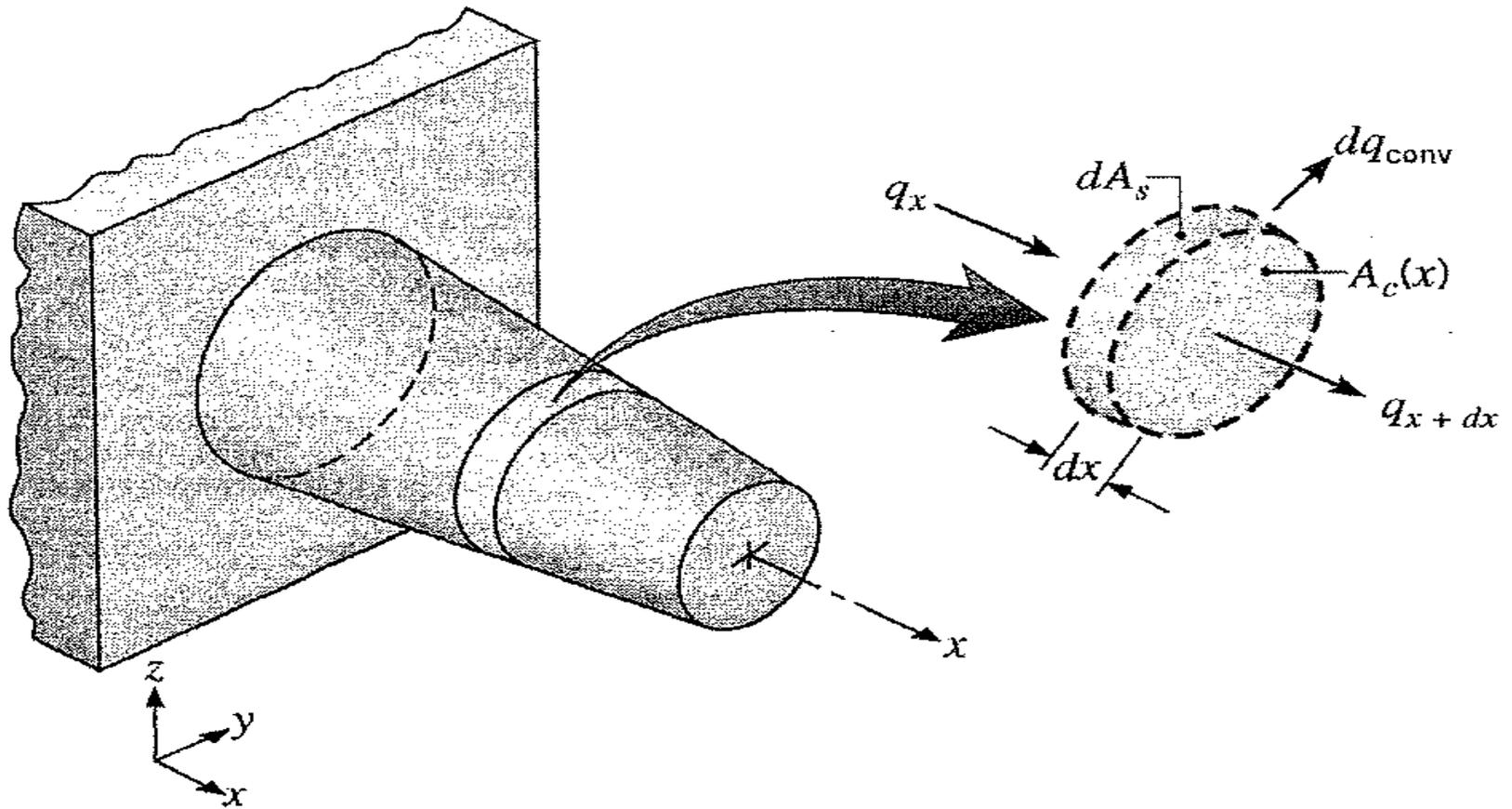


Fig. 3.15 Balanço de energia para uma superfície estendida.

reção x . Vamos considerar condições de regime estacionário, condutividade térmica constante, radiação da superfície desprezível, efeitos da geração de calor ausentes e o coeficiente de transferência de calor por convecção h uniforme ao longo da superfície.

Aplicando a exigência da conservação de energia ao elemento diferencial da Fig. 3.15, obtemos

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{\text{conv}}$$

Da lei de Fourier sabemos que

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}$$

em que A_c é a área de *seção reta*, que pode variar com x . Além disso, vez que a taxa de transferência de calor em $x + dx$ pode ser expressa como

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

segue que

$$q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_c \frac{dT}{dx} \right) dx$$

A taxa de transferência por convecção pode ser expressa

$$dq_{\text{conv}} = h dA_s(T - T_\infty)$$

em que dA_s é a área *superficial* do elemento diferencial. Substituindo as equações anteriores para as taxas no balanço de energia, Eq. 3.56, obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(A_c \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) = 0$$

ou

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$

Esse resultado é a forma geral da equação de energia para uma superfície estendida. Sua solução para condições de contorno apropriadas fornece a distribuição de temperatura, que pode ser utilizada com a Eq. 3.57 para o cálculo da taxa de transferência em qualquer x .

3.6.2 ALETAS COM ÁREA DE SEÇÃO RETA UNIFORME

Para resolvermos a Eq. 3.61 é necessário que sejamos mais específicos em relação à geometria. Iniciamos pelos casos mais simples das aletas planas retangulares e das aletas piniformes de seção reta uniforme (Fig. 3.16). Cada aleta está fixada a uma base cuja temperatura é $T(0) = T_b$ e se estende no interior de um fluido à temperatura T_∞ .

Para as aletas dadas, A_c é uma constante e $A_s = Px$, onde A_s é a área da superfície medida da base até x e P é o perímetro da aleta. Conseqüentemente, com $dA_c/dx = 0$ e $dA_s/dx = P$, a Eq. 3.61 se reduz a

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.62)$$

Para simplificar a forma dessa equação, transformamos a *variável* dependente definindo o *excesso de temperatura* θ como

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_\infty \quad (3.63)$$

onde, uma vez que T_∞ é uma constante, $d\theta/dx = dT/dx$. Substituindo a Eq. 3.63 na Eq. 3.62, obtemos

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (3.64)$$

onde

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_c} \quad (3.65)$$

A Eq. 3.64 é uma equação diferencial linear e homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Sua solução geral é da forma

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (3.66)$$

Por substituição, pode-se verificar facilmente que a Eq. 3.66 é de fato uma solução da Eq. 3.64.

Para avaliar as constantes C_1 e C_2 da Eq. 3.66, é necessário especificar condições de contorno apropriadas. Uma dessas

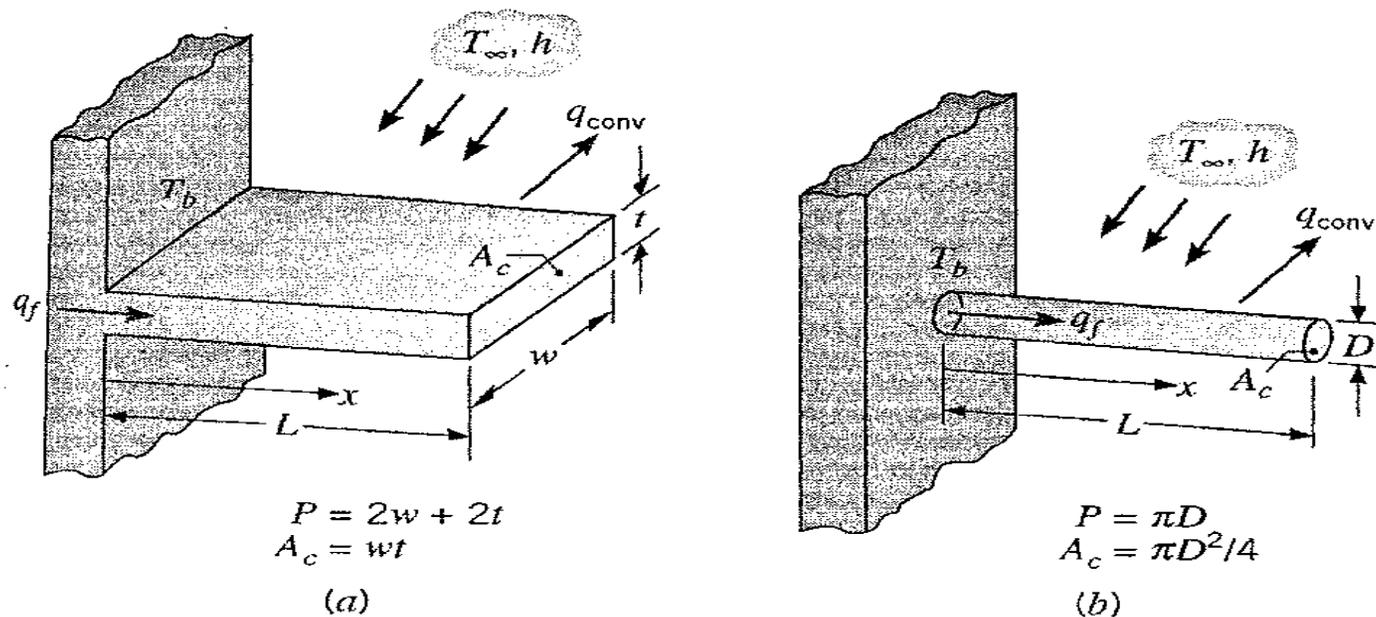


fig. 3.16 Aletas de seção reta uniforme. (a) Aleta retangular. (b) Aleta piniforme.

condições pode ser especificada em termos da temperatura da base da aleta ($x = 0$)

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b \quad (3.67)$$

A segunda condição, especificada na extremidade da aleta ($x = L$), pode corresponder a uma das quatro situações físicas diferentes.

A primeira condição, caso A, considera a transferência de calor por convecção a partir da extremidade da aleta. Aplicando o balanço de energia a uma superfície de controle ao redor da extremidade (Fig. 3.17), obtemos

$$hA_c[T(L) - T_\infty] = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

ou

$$h\theta(L) = -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.68)$$

Ou seja, a taxa na qual a energia é transferida para o fluido por convecção a partir da extremidade deve ser igual à taxa na qual a energia alcança a extremidade por condução através da aleta. Substituindo a Eq. 3.66 nas Eqs. 3.67 e 3.68, obtemos, respectivamente,

$$\theta_b = C_1 + C_2 \quad (3.69)$$

e

$$h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$$

Resolvendo para C_1 e C_2 , pode ser mostrado, após alguma manipulação algébrica, que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.70)$$

A forma da distribuição de temperatura é mostrada esquematicamente na Fig. 3.17. Observe que a magnitude do gradiente

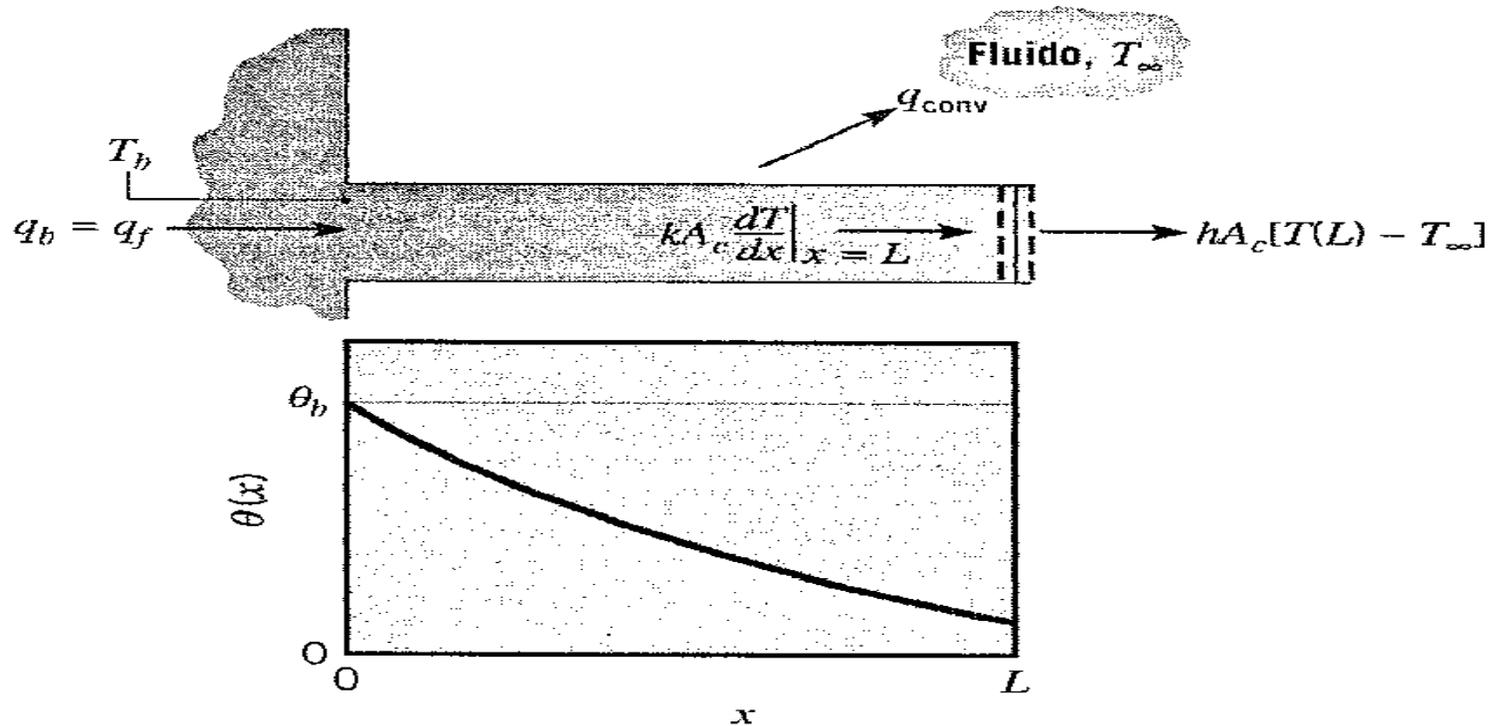


Fig. 3.17 Condução e convecção em uma aleta de seção reta uniforme.

de temperatura diminui com a diminuição de x . Essa tendência é uma consequência da redução na transferência de calor por condução $q_x(x)$ com o aumento de x devido à perda contínua de calor por convecção a partir da superfície da aleta.

Estamos particularmente interessados no calor total transferido a partir de toda a aleta. Da Fig. 3.17 é evidente que a taxa q_a de transferência de calor da aleta pode ser avaliada de dois modos distintos, ambos envolvendo a utilização da distribuição de temperatura. O procedimento mais simples, que vamos utilizar, envolve a aplicação da lei de Fourier na base da aleta. Ou seja,

$$q_a = q_b = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -kA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.71)$$

Logo, conhecendo a distribuição de temperatura, $\theta(x)$, q_a pode ser avaliada pela expressão

$$q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.72)$$

Contudo, a conservação de energia nos diz que a taxa na qual o calor é transferido por convecção a partir da aleta deve ser igual à taxa na qual é conduzida através da base da aleta. Conseqüentemente, a formulação alternativa para q_a é

$$q_a = \int_{A_a} h[T(x) - T_\infty] dA_s$$

$$q_a = \int_{A_a} h\theta(x) dA_s \quad (3.73)$$

onde A_a é a área *total da superfície da aleta*, incluindo sua extremidade. Substituindo a Eq. 3.70 na Eq. 3.73 nos leva à Eq. 3.72.

A segunda condição para a extremidade da aleta, caso corresponde à consideração de que a perda de calor por convecção a partir da extremidade da aleta é desprezível. Nesse caso, a extremidade pode ser considerada adiabática e

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.7)$$

Substituindo na Eq. 3.66 e dividindo por m , obtemos

$$C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0$$

Utilizando essa expressão com a Eq. 3.69 para resolvermos para C_1 e C_2 e substituindo os resultados na Eq. 3.66, obtemos

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (3.7)$$

Utilizando essa distribuição de temperatura com a Eq. 3.71 taxa de transferência de calor da aleta é então

$$q_a = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \tanh mL \quad (3.7)$$

Da mesma forma, podemos obter a distribuição de temperatura da aleta e a taxa de transferência de calor para o caso onde a temperatura é dada na extremidade da aleta. Ou seja segunda condição de contorno é $\theta(L) = \theta_L$, e as expressões resultantes são da forma

TABELA 3.4 Distribuição de temperatura e perda de calor para aletas de seção transversal uniforme

CASO	CONDIÇÃO DA EXTREMIDADE ($x = L$)	DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA θ/θ_b	TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR DA ALETA q_a
A	Transferência de calor por convecção: $h\theta(L) = -kd\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.70)	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.72)
B	$d\theta/dx _{x=L} = 0$ Adiabática	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (3.75)	$M \tanh mL$ (3.76)
C	Temperatura prescrita: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$ (3.77)	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$ (3.78)
D	Aleta infinita ($L \rightarrow \infty$) $\theta(L) = 0$	e^{-mx} (3.79)	M (3.80)

$\theta \equiv T - T_\infty$ $m^2 \equiv hP/kA_c$
 $\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty$ $M \equiv \sqrt{hPkA_c} \theta_b$